INTERPOLATIONSEIGENSCHAFTEN S SPEKTRUMS LINEARER OPERATOREN AUF L^p–RÄUMEN

Dissertation

der Mathematischen Fakultät

der Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Jürgen Auterhoff

aus Würzburg

1982

INTERPOLATIONSEIGENSCHAFTEN DES SPEKTRUMS LINEARER OPERATOREN AUF L^P–RÄUMEN

Dissertation

der Mathematischen Fakultät

der Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Jürgen Auterhoff

aus Würzburg

1982

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Qualifikation : 10. Dezember 1982

Dekan : Prof. Dr. A. Schönhage

1. Berichterstatter : Prof. Dr. H. H. Schaefer

2. Berichterstatter : Prof. Dr. H. Heyer

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung 1

1. Die komplexe Interpolationsmethode ... 4

2. Kompakte Operatoren auf L^p - Räumen ... 17

3. Das Spektrum beschränkter Operatoren auf Interpolationsräumen 28

4. Feinstruktur des Spektrums 44

5. Unbeschränkte Operatoren auf Interpolationsräumen 57

Literatur 67

Einleitung

Bei der funktionalanalytischen Behandlung linearer Differential- und Integralgleichungen werden die entsprechenden linearen Operatoren und insbesondere deren Spektrum untersucht. Dabei kann es von Interesse sein,solche linearen Operatoren auf verschiedenen L^p - Räumen eines festen Maßraumes zu betrachten. Einen wesentlichen Beitrag hierzu liefert der Rieszsche Konvexitätssatz,der in seiner Urversion bereits 1927 von M.Riesz [19] veröffentlicht wurde und später Anlaß zu zahlreichen Verfeinerungen und Modifikationen gab ([14],[27]). Eine operatorentheoretische Formulierung des Satzes findet man in [5]. Es wird darin die Aussage gemacht,daß ein linearer Operator,der zwei Räume $L^p(\mu)$ und $L^q(\mu)$ stetig in sich abbildet,auch eine stetige Fortsetzung $L^r(\mu) \to L^r(\mu)$ besitzt,falls r zwischen p und q liegt. Ferner ist die Operatornorm in Abhängigkeit von $\frac{1}{r}$ eine logarithmisch konvexe Funktion. Die Untersuchung der Eigenschaften dieser Fortsetzungen ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit,wobei der Hauptakzent auf seiten der Spektraltheorie liegt.

Im ersten Kapitel gehen wir zunächst von einem allgemeineren Konzept aus. Es werden dort Grundlagen der

Interpolationstheorie erörtert. Die oben beschriebene L^p - Situation erweist sich in diesem Rahmen als Beispiel. Der Grund für dieses Vorgehen liegt nicht in dem Bestreben,die Untersuchungen in größerer Allgemeinheit durchzuführen,sondern vielmehr darin,daß die Resultate der Interpolationstheorie zusätzliche Einsichten gewähren und Methoden bereitstellen,die bei der Behandlung unserer Problemstellung nutzbringend angewandt werden können.

Kapitel 2 ist der Frage gewidmet,unter welchen Voraussetzungen sich die Kompaktheit eines Operators auf seine "Rieszfortsetzungen" vererbt. In Verallgemeinerung eines Resultats von Krasnoselskii [12] wird gezeigt,daß dies fast ohne Einschränkungen positiv zu beantworten ist. Die Aussage läßt sich direkt aus dem Rieszschen Konvexitätssatz ableiten.

Im dritten Kapitel beginnen wir mit der Untersuchung der Interpolationseigenschaften des Spektrums linearer Operatoren. Durch Beispiele wird belegt, daß die Spektren eines linearen Operators auf verschiedenen L^p - Räumen im allgemeinen nicht übereinstimmen. Die Änderung des Spektrums ist jedoch im Inneren des Interpolationsintervalls einer Kontinuitätsbedingung unterworfen. Für nulldimensionale,insbesondere für abzählbare Spektren hat Schaefer [23] deren Unabhängigkeit von p bewiesen.

Diese Untersuchungen werden in Kapitel 4 durch

entsprechende Betrachtungen für Teilmengen des Spektrums ergänzt. Es wird gezeigt,daß sich unter gewissen Voraussetzungen isolierte Singularitäten der Resolvente im Sinne des Rieszschen Satzes "fortsetzen" lassen. Ein zu [23] analoges Resultat für nulldimensionale Fredholmspektren beweisen wir im Anschluß daran.

Das Ziel des fünften Kapitels ist es,auch unbeschränkte Operatoren in die Diskussion einzubeziehen. Zunächst wird dazu ein Konzept definiert,das die Fortsetzung solcher Operatoren auf Interpolationsräume festlegt. In diesem Rahmen untersuchen wir dann die Fortsetzungseigenschaften von Operatoren mit kompakter Resolvente und beweisen einen Satz über die Gleichheit nulldimensionaler Spektren. Diese Resultate werden abschließend auf einen linearen Differentialoperator angewandt.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof.Dr.H.H.Schaefer, der die Anregung zu dieser Arbeit gab und ihr Entstehen durch seinen hilfreichen Rat und wertvolle Denkanstöße gefördert hat. Bei den Mitgliedern des Arbeitsbereiches Funktionalanalysis bedanke ich mich für zahlreiche Diskussionen und Hinweise,namentlich bei Herrn Dr.G.Greiner für seine stete Hilfsbereitschaft.

KAPITEL 1

Die komplexe Interpolationsmethode

Dieses erste Kapitel soll eine kurze Übersicht über die Grundzüge der Theorie der Interpolationsräume geben. Es werden hier Notationen eingeführt,die in den weiteren Kapiteln Verwendung finden. Die folgenden Resultate werden zum Teil ohne Beweis angegeben. Zur diesbezüglichen Ergänzung sei auf die Lehrbücher von J.Bergh und J.Löfström [1] sowie von H.Triebel [29] verwiesen.

Es seien B_0 und B_1 Banachräume,die beide stetig in einen Hausdorffschen topologischen Vektorraum V eingebettet sind. Wir bezeichnen in dieser Situation das Paar (B_0,B_1) als Interpolationspaar. Die Räume $\Delta(B_0,B_1) := B_0 \cap B_1$, versehen mit der für alle $x \in \Delta(B_0,B_1)$ durch

$$\|x\|_\Delta := \max\left(\|x\|_{B_0}, \|x\|_{B_1}\right)$$

definierten Norm,und $\Sigma(B_0,B_1) := B_0 + B_1$ mit der Norm

$$\|x\|_\Sigma := \inf\left\{\|x_0\|_{B_0} + \|x_1\|_{B_1} \,\middle|\, x = x_0+x_1 \ , \ x_i \in B_i\right\}$$

für alle $x \in \Sigma(B_0,B_1)$ sind dann ebenfalls Banachräume

mit stetiger Einbettung in V. Wir werden auch kurz Δ und Σ statt $\Delta(B_0,B_1)$ und $\Sigma(B_0,B_1)$ schreiben, sofern Verwechslungen bezüglich des Interpolationspaares ausgeschlossen sind.

1.1 DEFINITION. Als intermediären Raum bezüglich (B_0,B_1) bezeichnen wir einen Banachraum B, für den die Inklusionen $\Delta \subset B \subset \Sigma$ mit stetigen Einbettungen gelten.

Falls zusätzlich jeder lineare Operator $T : \Sigma \to \Sigma$ mit stetigen Restriktionen $T_0 : B_0 \to B_0$ und $T_1 : B_1 \to B_1$ auch B stetig in sich abbildet, so heißt B Interpolationsraum bezüglich (B_0,B_1).

Im folgenden wird die auf Calderón [3] zurückgehende "komplexe Interpolationsmethode" beschrieben. Es handelt sich dabei um ein Verfahren zur Konstruktion einer Familie von Interpolationsräumen.

Wir betrachten für ein gegebenes Interpolationspaar (B_0,B_1) komplexer Banachräume den Raum $F = F(B_0,B_1)$ aller stetigen Funktionen

$$f : \quad S := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \right\} \to \Sigma$$

mit folgenden Eigenschaften :

(i) f ist beschränkt auf S und holomorph auf S°.

(ii) Für $j \in \{0,1\}$ ist die Funktion

$f_j : t \mapsto f(j+it)$ stetig von $\mathbb{R}$ in B_j, und es gilt $\lim_{|t|\to\infty} f_j(t) = 0$.

F versehen mit der Norm

$$\|f\|_F := \max\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_{B_0}, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(1+it)\|_{B_1}\right)$$

ist ein Banachraum. Für alle $\theta \in [0,1]$ definieren wir nun

$$B_{[\theta]} := \left\{ x \in \Sigma \;\middle|\; \exists\, f \in F \text{ mit } x = f(\theta) \right\} .$$

1.2 THEOREM. $B_{[\theta]}$ mit der Norm

$$\|x\|_{[\theta]} := \inf\left\{ \|f\|_F \;\middle|\; f \in F ,\ f(\theta) = x \right\}$$

für alle $x \in B_{[\theta]}$ ist ein Interpolationsraum bezüglich (B_0,B_1) . Für die Restriktion $T_{[\theta]}$ eines Operators $T : \Sigma \to \Sigma$ wie in Definition 1.1 auf $B_{[\theta]}$ gilt die Ungleichung

$$\|T_{[\theta]}\| \le \|T_0\|^{1-\theta} \cdot \|T_1\|^{\theta} .$$

Beweis. Für jedes $f \in F$ und alle $z \in S$ gilt nach einer Variante des Maximumprinzips der Funktionentheorie die Ungleichung

$$\|f(z)\|_\Sigma \leq \max\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_{B_0}, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(1+it)\|_{B_1}\right).$$

Daraus folgt $\|f(z)\|_\Sigma \leq \|f\|_F$ für alle $z \in S$.
Die Abbildung $f \mapsto f(\theta)$ von F in Σ ist also für festes $\theta \in [0,1]$ stetig, ihr Kern $N_\theta = \{f \in F \mid f(\theta) = 0\}$ daher abgeschlossen. Man sieht leicht, daß der Quotientenraum F/N_θ isometrisch isomorph zu $B_{[\theta]}$ ist. Also ist $B_{[\theta]}$ ein Banachraum. Außerdem folgt für alle $x \in B_{[\theta]}$ und alle $f \in F$ mit $f(\theta) = x$

$$\|x\|_\Sigma \leq \|f\|_F \text{ , also } \|x\|_\Sigma \leq \|x\|_{[\theta]} .$$

Um entsprechend die stetige Einbettung $\Delta \subset B_{[\theta]}$ zu zeigen, betrachten wir für beliebiges $\delta > 0$ und $x \in \Delta$ die Funktion $f \in F$, definiert durch

$f(z) = \exp\left[\delta(z-\theta)^2\right] \cdot x$ für alle $z \in S$. Es ist

$$\|f\|_F = \max\left(e^{\delta\theta^2} \cdot \|x\|_{B_0}, e^{\delta(1-\theta)^2} \cdot \|x\|_{B_1}\right)$$

und $f(\theta) = x$. Daraus folgt $x \in B_{[\theta]}$ und

$$\|x\|_{[\theta]} \leq \max\left(\|x\|_{B_0}, \|x\|_{B_1}\right) = \|x\|_\Delta ,$$

wie man durch Variation von δ einsieht.
Wir haben bisher bewiesen, daß $B_{[\theta]}$ intermediärer Raum bezüglich (B_0, B_1) ist. Sei nun $T : \Sigma \to \Sigma$ ein linearer

Operator mit stetigen Restriktionen $T_0 : B_0 \to B_0$ und $T_1 : B_1 \to B_1$ sowie $x \in B_{[\theta]}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $f \in F$ mit $f(\theta) = x$ und $\|f\|_F \leq \|x\|_{[\theta]} + \varepsilon$. Eine weitere Funktion $g : S \to \Sigma$ sei definiert durch

$$g(z) = \|T_0\|^{z-\theta} \cdot \|T_1\|^{\theta-z} \cdot T(f(z)) .$$

Aus der Stetigkeit von T_0 und T_1 folgt

$$\|T\| \leq \max\left(\|T_0\| , \|T_1\|\right) ,$$

also die Beschränktheit von T. Es ist deshalb $g \in F$, und wegen $g(\theta) = T(x)$ ist $T(x) \in B_{[\theta]}$. Außerdem gilt die Abschätzung

$$\|g\|_F \leq \|T_0\|^{1-\theta} \cdot \|T_1\|^{\theta} \cdot \|f\|_F .$$

Daraus folgt

$$\|T(x)\|_{[\theta]} = \inf \left\{ \|g\|_F \;\middle|\; g \in F , g(\theta) = T(x) \right\}$$

$$\leq \|T_0\|^{1-\theta} \cdot \|T_1\|^{\theta} \cdot \|x\|_{[\theta]} ,$$

und damit die behauptete Ungleichung. ∎

1.3 BEMERKUNGEN.

(1) Der Raum Δ ist dicht in $B_{[\theta]}$ für alle $\theta \in [0,1]$.

(2) Es ist für $\theta \in \{0,1\}$ $B_{[\theta]}$ ein abgeschlossener Teilraum von B_θ mit gleicher Norm, jedoch im allgemeinen $B_{[\theta]} \neq B_\theta$. Wir werden im folgenden für $\theta \in]0,1[$ B_θ statt $B_{[\theta]}$ sowie $\|\cdot\|_\theta$ statt $\|\cdot\|_{[\theta]}$ schreiben.

Wir behandeln nun die Interpolation von komplexen L^p - Räumen eines beliebigen Maßraumes (X,Σ,μ) nach der oben beschriebenen Methode. Dabei werden aus Gründen der Übersichtlichkeit Funktionen mit den entsprechenden Äquivalenzklassen modulo μ - Nullfunktionen identifiziert.

Für jedes $p \in [1,\infty]$ ist der Banachraum L^p stetig eingebettet in den Raum M der Σ - meßbaren Funktionen, versehen mit der Topologie der μ - Konvergenz ([5],III,3.6). Für $p,q \in [1,\infty]$ ist daher (L^p,L^q) ein Interpolationspaar.

1.4 LEMMA. Sei $1 \leq p < r < q \leq \infty$. Es gelten die Inklusionen $L^p \cap L^q \subset L^r \subset L^p + L^q$.

Beweis. Sei $f \in L^p \cap L^q$. Mit $A := \left\{ x \in X \;\middle|\; |f(x)| \leq 1 \right\}$ und $B := \left\{ x \in X \;\middle|\; |f(x)| > 1 \right\}$ definieren wir die Funktionen $f_A := f \cdot \chi_A$ und $f_B := f \cdot \chi_B$. Dabei bezeichnen χ_A und χ_B die charakteristischen Funktionen von A und B.

Es ist $|f_A|^r \leq |f_A|^p$ und,falls $q < \infty$, $|f_B|^r \leq |f_B|^q$. Im Fall $q = \infty$ ist $|f_B|^r \leq K$ für eine geeignete Konstante K. Außerdem ist $\mu(B) < \infty$ wegen $f \in L^p$. Daher gilt in jedem Fall $f_A, f_B \in L^r$.

Sei nun $f \in L^r$. Wie oben definieren wir die Funktionen f_A und f_B. Es ist $|f_B|^p \leq |f_B|^r$ und,falls $q < \infty$, $|f_A|^q \leq |f_A|^r$. Daraus folgt $f_B \in L^p$ und $f_A \in L^q$ (falls $q = \infty$ ist,gilt dies trivialerweise). ∎

1.5 SATZ. Sei (X,Σ,μ) ein Maßraum und $B_0 := L^p(\mu)$, $B_1 := L^q(\mu)$ für $p,q \geq 1$. Für alle $\theta \in]0,1[$ ist dann $B_\theta = L^r(\mu)$, wobei $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$ ist (bzw. $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q}$ oder $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p}$,falls $p = \infty$ oder $q = \infty$).

Beweis. L_0 bezeichne den Raum der μ - integrierbaren Elementarfunktionen auf X. Es genügt,für alle $f \in L_0$ $\|f\|_r = \|f\|_\theta$ zu zeigen. Wegen der Dichtheit von L_0 in L^r sowie der stetigen Einbettung von L^r und B_θ in M folgt daraus $L^r \subset B_\theta$. Andererseits ist $L^p \cap L^q$ dicht in B_θ (Bemerkung 1.3.1),woraus mit Lemma 1.4 $L^r = B_\theta$ folgt.

Für jedes $f \in L_0$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir auf $S := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1 \right\}$ eine Funktion φ_ε durch

$$\varphi_\varepsilon(z) := \exp\left[\varepsilon z^2 - \varepsilon \theta^2\right] \cdot |f|^{r[(1-z)/p + z/q]} \cdot \tilde{f} \quad ,$$

wobei

$$\tilde{f}: X \to \mathbb{C} \;;\; x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|}, & \text{falls } f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{falls } f(x) = 0 \end{cases} .$$

(Im Fall $p = \infty$ oder $q = \infty$ ist der Exponent von $|f|$ entsprechend zu modifizieren). Es ist $\varphi_\varepsilon \in F$ und $\varphi_\varepsilon(\theta) = f$, also $\|f\|_\theta \leq \|\varphi_\varepsilon\|_F$ für alle $\varepsilon > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $\|f\|_r = 1$ an. Dann ist

$$\|\varphi_\varepsilon\|_F = \max\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi_\varepsilon(it)\|_p \,,\, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi_\varepsilon(1+it)\|_q\right)$$

$$= \max\left(e^{-\varepsilon\theta^2},\, e^{\varepsilon(1-\theta^2)}\right) \leq e^{\varepsilon}$$

und damit $\|f\|_\theta \leq 1$.

Es bleibt zu zeigen, daß für jedes $f \in L_0$ $\|f\|_r \leq \|f\|_\theta$ ist. Mit p', q' und r' bezeichnen wir im folgenden die durch die Gleichung $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (q' und r' entsprechend) definierten Zahlen in $[1,\infty]$. Es gilt damit

$$\|f\|_r = \sup\left\{ |\langle f,g\rangle| \;\middle|\; g \in L_0,\, \|g\|_{r'} = 1 \right\} .$$

Für ein festes $g \in L_0$ mit $\|g\|_{r'} = 1$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir wie oben eine Funktion $\psi_\varepsilon \in F$ durch

$$\psi_\varepsilon(z) := \exp\left[\varepsilon z^2 - \varepsilon\theta^2\right] \cdot |g|^{r'[(1-z)/p' + z/q']} \cdot \tilde{g} .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\|f\|_\theta = 1$.
Dann existiert ein $\varphi \in F$ mit $\varphi(\theta) = f$ und
$\|\varphi\|_F \leq e^\varepsilon$. Damit definieren wir eine weitere Funktion

$$\Phi_\varepsilon : S \to \mathbb{C} \quad \text{durch} \quad \Phi_\varepsilon(z) := \langle \varphi(z), \psi_\varepsilon(z) \rangle .$$

Φ_ε ist auf S beschränkt und auf S° holomorph. Nach dem Maximumprinzip gilt daher für alle $z \in S$

$$|\Phi_\varepsilon(z)| \leq \max\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\Phi_\varepsilon(it)| , \sup_{t\in\mathbb{R}} |\Phi_\varepsilon(1+it)| \right)$$

$$\leq \max\left(e^\varepsilon , e^{2\varepsilon} \right) = e^{2\varepsilon} .$$

Daraus folgt $|\langle f,g\rangle| = |\Phi_\varepsilon(\theta)| \leq e^{2\varepsilon}$ für alle $\varepsilon > 0$,
also $|\langle f,g\rangle| \leq 1$ und damit $\|f\|_r \leq 1$. ∎

Die Aussage des Satzes kann im Sinne der Bemerkungen 1.3 wie folgt ergänzt werden. Falls $p \neq \infty$ bzw. $q \neq \infty$, so ist $B_{[0]} = B_0$ bzw. $B_{[1]} = B_1$. Dasselbe gilt für $L^\infty(\mu)$, wenn der Maßraum endlich ist. Im Falle eines unendlichen Maßraumes erhält man für $p < \infty$ und $q = \infty$ $B_{[1]} = L^\infty_0(\mu)$, den Abschluß der integrierbaren Elementarfunktionen in $L^\infty(\mu)$.

Zum Abschluß dieses Kapitels formulieren wir drei Lemmata, die später benötigt werden.

1.6 LEMMA. Sei (B_0,B_1) ein Interpolationspaar komplexer Banachräume. Für jedes $t>0$ ist

$$K(t,x) := \inf\left\{\|x_0\|_{B_0} + t\cdot\|x_1\|_{B_1} \;\middle|\; x=x_0+x_1\ ,\ x_i\in B_i\right\}$$

auf Σ eine zu $\|\cdot\|_\Sigma$ äquivalente Norm. Es gilt für jedes $\theta\in\,]0,1[$ und alle $x\in B_\theta$ die Ungleichung

$$K(t,x) \le t^\theta\cdot\|x\|_\theta\ .$$

Beweis. Die Normeigenschaften von $K(t,\cdot)$ sind evident. Es gilt ferner für alle $x\in\Sigma$

$$\min\{1,t\}\cdot\|x\|_\Sigma \le K(t,x) \le \max\{1,t\}\cdot\|x\|_\Sigma\ .$$

Sei nun für beliebiges $\theta\in\,]0,1[$ $x\in B_\theta$ und $f\in F$ mit $f(\theta)=x$. Dann ist

$$K(t,f(i\tau)) \le \|f(i\tau)\|_{B_0} \quad \text{und}$$

$$K(t,f(1+i\tau)) \le t\cdot\|f(1+i\tau)\|_{B_1} \quad \text{für alle } \tau\in\mathbb{R}\ .$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe des Phragmén - Lindelöf Prinzips ([5],VI,10.3)

$$K(t,x) \le \left(\sup_{\tau\in\mathbb{R}} K(t,f(i\tau))\right)^{1-\theta}\cdot\left(\sup_{\tau\in\mathbb{R}} K(t,f(1+i\tau))\right)^{\theta}$$

$$\leq \left(\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|f(i\tau)\|_{B_0} \right)^{1-\Theta} \cdot \left(t \cdot \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|f(1+i\tau)\|_{B_1} \right)^{\Theta}$$

$$\leq t^{\Theta} \cdot \|f\|_F \quad ,$$

also $K(t,x) \leq t^{\Theta} \cdot \|x\|_{\Theta}$. ∎

Falls für ein Interpolationspaar (B_0,B_1) der Raum $\Delta = B_0 \cap B_1$ dicht in B_0 und B_1 ist,so lassen sich die Dualräume B_0' und B_1' als Teilräume von Δ' auffassen,vermöge der injektiven Abbildung $f \mapsto f_{|\Delta}$,die jedem Funktional $f \in B_0' \cup B_1'$ seine Restriktion auf Δ zuordnet. Die Einbettungen $B_0' \to \Delta'$ und $B_1' \to \Delta'$ sind überdies stetig. In diesem Fall ist also (B_0',B_1') ein Interpolationspaar,und es ist daher die Definition von $B_0' \cap B_1'$ und $B_0' + B_1'$ sinnvoll. Es besteht der folgende Zusammenhang.

1.7 LEMMA. Es sei (B_0,B_1) ein Interpolationspaar und Δ dicht in B_j ($j \in \{0,1\}$) . Dann gelten die folgenden Aussagen.

(1) Σ' ist isometrisch isomorph zu $B_0' \cap B_1'$.

(2) Δ' ist isometrisch isomorph zu $B_0' + B_1'$.

Beweis. (1) Jedes $f \in B_0' \cap B_1' \subset \Delta'$ läßt sich eindeutig zu einem Funktional $\hat{f}$ auf Σ fortsetzen. Zu zeigen

bleibt die Beschränktheit von $\hat{f}$. Es gilt für alle $x \in \Sigma$ und $x_0 \in B_0$, $x_1 \in B_1$ mit $x = x_0 + x_1$

$$|\hat{f}(x)| \leq \|f\|_{B_0'} \cdot \|x_0\|_{B_0} + \|f\|_{B_1'} \cdot \|x_1\|_{B_1}$$

$$\leq \max\left(\|f\|_{B_0'}, \|f\|_{B_1'}\right) \cdot \left[\|x_0\|_{B_0} + \|x_1\|_{B_1}\right],$$

also $\|\hat{f}\|_{\Sigma'} \leq \|f\|_{B_0' \cap B_1'}$.

Umgekehrt sei $f \in \Sigma'$. Es ist Δ dicht in Σ,denn für alle $\varepsilon > 0$ und jedes $x \in \Sigma$ ($x = x_0 + x_1$, $x_0 \in B_0$, $x_1 \in B_1$) existieren $y_0, y_1 \in \Delta$ mit $\|x_0 - y_0\|_{B_0} < \varepsilon$ und $\|x_1 - y_1\|_{B_1} < \varepsilon$, also $\|x - (y_0+y_1)\|_{\Sigma} < 2\varepsilon$. Die Abbildung $f \mapsto f_{|\Delta}$ ist deshalb injektiv. Außerdem ist wegen

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\Sigma'} \cdot \|x\|_{\Sigma} \leq \|f\|_{\Sigma'} \cdot \min\left(\|x\|_{B_0}, \|x\|_{B_1}\right)$$

für alle $x \in \Delta$ die Restriktion $f_{|\Delta}$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_{B_0}$ und $\|\cdot\|_{B_1}$; und es gilt

$$\|f_{|\Delta}\|_{B_0' \cap B_1'} = \max\left(\|f_{|\Delta}\|_{B_0'}, \|f_{|\Delta}\|_{B_1'}\right) \leq \|f\|_{\Sigma'} .$$

Damit ist der erste Teil des Lemmas bewiesen.

(2) [1] , 2.7.1 .∎

Das vorangegangene Lemma legt den Versuch nahe, in der beschriebenen Situation den Dual des Interpolationsraumes B_θ für $\theta \in]0,1[$ durch Interpolation bezüglich des Paares (B_0', B_1') zu konstruieren. In der Tat ist es möglich, eine Interpolationsmethode anzugeben, die in diesem Sinn zur oben ausgeführten Methode dual ist. Wir verzichten hier jedoch auf die Beschreibung dieser Konstruktion und verweisen auf [1], Kapitel 4 . Stattdessen ist für unsere Zwecke das folgende spezielle Resultat ausreichend, da in den weiteren Kapiteln die Interpolation von L^p - Räumen im Mittelpunkt stehen wird.

1.8 LEMMA. Es liege dieselbe Situation wie in 1.7 vor. Zusätzlich sei mindestens einer der Räume B_0 und B_1 reflexiv. Dann ist für alle $\theta \in]0,1[$ B_θ' isometrisch isomorph zu $\hat{B}_\theta$. Dabei bezeichne $\hat{B}_\theta$ den gemäß der komplexen Interpolationsmethode bezüglich des Paares (B_0', B_1') konstruierten Raum.

Beweis. [1] , 4.5.2 .∎

KAPITEL 2

Kompakte Operatoren auf L^p - Räumen

Wir betrachten einen linearen Operator T,definiert auf einem Interpolationspaar (B_0,B_1) komplexer Banachräume mit Werten entweder in einem festen Banachraum E oder wieder in B_0 bzw. B_1. In diesem Kapitel wird die Frage untersucht,unter welchen Voraussetzungen sich die Kompaktheit von $T_{|B_0}$ oder $T_{|B_1}$,falls gegeben,auf die entsprechenden Fortsetzungen $T_{|B_\theta}$ ($\theta \in]0,1[$) vererbt. Im ersten Fall läßt sich die Frage ohne Zusatzvoraussetzungen positiv beantworten. Dies wird in 2.1 gezeigt. Das Resultat wurde von Lions und Peetre ([13],V,2.2) für eine gewisse Klasse von Interpolationsräumen bewiesen. Wir haben in Lemma 1.6 gezeigt,daß die in Kapitel 1 definierten komplexen Interpolationsräume dieser Klasse angehören. Für Interpolationsräume,die einer zusätzlichen Approximationshypothese genügen,hat Persson [18] daraus ein analoges Resultat für den zweiten Fall abgeleitet. Ähnliche Ergebnisse für die reelle Interpolationsmethode (vgl. [1],[29]) wurden von Hayakawa [8] bewiesen. Wir gehen auf diese Zusammenhänge hier nicht näher ein,sondern spezialisieren unsere Fragestellung auf die Interpolation von L^p - Räumen. Für den Fall,daß der zugrunde liegende Maßraum eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist,

versehen mit dem Lebesgue - Maß, hat Krasnoselskii [12] eine entsprechende Aussage bewiesen. In Theorem 2.3 wird dieses Resultat auf den Fall eines beliebigen Maßraumes verallgemeinert. Eine Sonderbehandlung erfordert in diesem Zusammenhang der Raum L^∞. Wir formulieren eine diesbezügliche Ergänzung von 2.3 im anschließenden Korollar.

2.1 THEOREM. Sei (B_0,B_1) ein Interpolationspaar komplexer Banachräume und E ein beliebiger komplexer Banachraum. Weiter sei $T : \Sigma \to E$ ein linearer Operator mit stetigen Restriktionen $T_0 : B_0 \to E$ und $T_1 : B_1 \to E$. Wenn T_0 kompakt ist, so auch $T_\theta : B_\theta \to E$ für alle $\theta \in]0,1[$.

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in B_θ. Es gelte für alle $n\in\mathbb{N}$ $\|x_n\|_\theta \leq C$ für ein geeignetes $C \in \mathbb{R}_+$. Sei weiter $\varepsilon > 0$ beliebig und $t > 0$ so gewählt, daß $t^{\theta-1} < \varepsilon$. Wir wählen nun für jedes $n\in\mathbb{N}$ $x_n^{(0)} \in B_0$ und $x_n^{(1)} \in B_1$ mit $x_n = x_n^{(0)} + x_n^{(1)}$ und

$$\|x_n^{(0)}\|_{B_0} + t \cdot \|x_n^{(1)}\|_{B_1} \leq 2\, K(t,x_n) \quad ,$$

wobei $K(t,\cdot)$ wie in 1.6 definiert ist. Mit Lemma 1.6 folgt dann

$$\|x_n^{(0)}\|_{B_0} + t \cdot \|x_n^{(1)}\|_{B_1} \leq 2\, C\, t^\theta \quad .$$

Es ist also $(x_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in B_0, und wegen der Kompaktheit von T_0 existiert daher eine Teilfolge $(x_{n_k}^{(0)})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\|T_0\, x_{n_l}^{(0)} - T_0\, x_{n_m}^{(0)}\|_E < \varepsilon \quad \text{für alle } l,m \in \mathbb{N} .$$

Es gilt außerdem

$$\|T_1\, x_{n_l}^{(1)} - T_1\, x_{n_m}^{(1)}\|_E \leq \|T_1\| \cdot \|x_{n_l}^{(1)} - x_{n_m}^{(1)}\|_{B_1}$$

$$\leq 4C\|T_1\|\, t^{\theta-1} < 4C\|T_1\|\,\varepsilon .$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|T_\theta\, x_{n_l} - T_\theta\, x_{n_m}\|_E < \varepsilon\cdot(1 + 4C\|T_1\|) .$$

Mit Hilfe einer Diagonalkonstruktion läßt sich schließlich eine Teilfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart finden, daß $(T_\theta y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in E ist. Der Operator $T_\theta : B_\theta \to E$ ist also kompakt.∎

Für einen Maßraum (X,Σ,μ) bezeichne L_0 den Raum der μ-integrierbaren Elementarfunktionen und M den Raum aller Σ-meßbaren Funktionen. Wir gehen im folgenden aus von einem linearen Operator $T_0 : L_0 \to M$ mit stetigen Fortsetzungen $T_p : L^p \to L^p$ und $T_q : L^q \to L^q$ $(p,q \geq 1)$. Dies steht im Einklang mit den bisherigen

Ausführungen, da T_p und T_q auf $\Delta(L^p,L^q)$ übereinstimmen und somit eindeutig einen Operator T auf $\Sigma(L^p,L^q)$ definieren. Die Begründung dafür liefert das folgende Lemma.

2.2 LEMMA. Der Raum L_0 ist für $1 \leq p < q \leq \infty$ dicht in $\Delta(L^p,L^q)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\Delta = \max\left(\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_q\right)$.

Beweis. Es sei $f \in \Delta$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine meßbare Menge $E_\varepsilon \in \Sigma$ mit $\mu(E_\varepsilon) < \infty$, sodaß

$$(1) \qquad \left(\int_{X \setminus E_\varepsilon} |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und}$$

$$(2) \qquad \left(\int_{X \setminus E_\varepsilon} |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \text{ falls } q < \infty ,$$

bzw. $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus E_\varepsilon$, falls $q = \infty$.

Für Funktionen auf dem endlichen Maßraum $(E_\varepsilon, \Sigma \cap E_\varepsilon, \mu)$ ist die Norm $\|\cdot\|_p$ schwächer als $\|\cdot\|_q$. Es existiert daher ein $k_\varepsilon > 0$ und eine Elementarfunktion $\tilde{f}_\varepsilon$ auf E_ε, sodaß

$$\left(\int_{E_\varepsilon} |f - \tilde{f}_\varepsilon|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq k_\varepsilon \cdot \left(\int_{E_\varepsilon} |f - \tilde{f}_\varepsilon|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$< k_\varepsilon \cdot \min\left(\frac{\varepsilon}{2k_\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad , \text{ falls } \quad q < \infty \text{ , bzw.}$$

$$\left(\int_{E_\varepsilon} |f - \tilde{f}_\varepsilon|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq k_\varepsilon \cdot \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; |f(x) - \tilde{f}_\varepsilon(x)| \leq \alpha \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in E_\varepsilon\right\}$$

$$< k_\varepsilon \cdot \min\left(\frac{\varepsilon}{2k_\varepsilon}, \varepsilon\right) \quad , \text{ falls } \quad q = \infty \quad .$$

Für alle $x \in X$ definieren wir

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} \tilde{f}_\varepsilon(x) \text{ , falls } x \in E_\varepsilon \\ 0 \text{ , falls } x \notin E_\varepsilon \end{cases} .$$

Es ist $f_\varepsilon \in L_0$, und es gilt

$$\|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon \quad \text{sowie} \quad \|f - f_\varepsilon\|_q < \varepsilon \quad . \blacksquare$$

2.3 THEOREM. (X,Σ,μ) sei ein beliebiger Maßraum und $T_0 : L_0 \to M$ ein linearer Operator mit stetigen Fortsetzungen $T_p : L^p \to L^p$ und $T_q : L^q \to L^q$ für $p,q \geq 1$ ($p \neq \infty$, falls der Maßraum unendlich ist). Außerdem sei T_p kompakt. Es ist dann auch die Fortsetzung $T_r : L^r \to L^r$ von T_0 kompakt für jedes $r \in]p,q[$ (bzw. $]q,p[$).

Beweis. Für jedes $r \in [p,q]$ (bzw. $[q,p]$) und jedes endliche Mengensystem $\Omega := \{E_1, \ldots, E_m\}$ paarweise disjunkter, meßbarer Teilmengen von X mit $0 < \mu(E_i) < \infty$ (für alle i=1,...,m) betrachten wir den linearen Operator

$$P_\Omega^{(r)} : L^r \to L^r \; ; \; f \mapsto \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{\mu(E_i)} \int f \cdot \chi_{E_i} \, d\mu \right) \chi_{E_i} \; .$$

Dabei bezeichnet χ_{E_i} die charakteristische Funktion von E_i. Die Familie aller solcher Operatoren $P_\Omega^{(r)}$, wobei Ω die Menge Π aller zulässigen Mengensysteme durchläuft, ist gleichmäßig beschränkt, denn es gilt nach der Hölderschen Ungleichung für alle $f \in L^r$ ($r \neq 1, \infty$)

$$\|P_\Omega^{(r)} f\|_r^r = \sum_{i=1}^{m} \left(\mu(E_i)\right)^{1-r} \cdot \left| \int f \cdot \chi_{E_i} \, d\mu \right|^r$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \int_{E_i} |f|^r \, d\mu \leq \|f\|_r^r \quad ,$$

also $\|P_\Omega^{(r)}\| \leq 1$.

Für $r = 1$ und $r = \infty$ zeigt man die letzte Ungleichung leicht direkt. Es ist also $\{P_\Omega^{(r)} : \Omega \in \Pi\}$ gleichstetig. Für alle $\varphi \in L_0$ konvergiert das Netz $(P_\Omega^{(r)} \varphi)_{\Omega \in \Pi}$ gegen φ. Da L_0 dicht in L^r ist, erhalten wir daraus mit Hilfe von [22], III,4.5 und der Kompaktheit von T_p zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $\Omega \in \Pi$, sodaß

$\|P_\Omega^{(p)} \cdot T_p - T_p\| < \varepsilon$ ist .

Der Rieszsche Konvexitätssatz liefert für $\theta \in]0,1[$ und $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$ die folgende Abschätzung.

$$\|P_\Omega^{(r)} T_r - T_r\| \leq \|P_\Omega^{(p)} T_p - T_p\|^{1-\theta} \cdot \|P_\Omega^{(q)} T_q - T_q\|^\theta$$

$$< \varepsilon^{1-\theta} \cdot (2\|T_q\|)^\theta .$$

T_r läßt sich also durch die Operatoren endlichen Ranges $P_\Omega^{(r)} T_r$ gleichmäßig approximieren und ist somit kompakt.∎

2.4 KOROLLAR. Es sei (X,Σ,μ) ein σ-endlicher Maßraum, $T_0 : L_0 \to M$ ein linearer Operator mit stetigen Fortsetzungen $T_p : L^p \to L^p$ $(1 \leq p < \infty)$ und $T_\infty : L^\infty \to L^\infty$. Außerdem sei T_∞ kompakt und schwach* stetig. Für alle $r \in]p,\infty[$ ist dann auch $T_r : L^r \to L^r$ kompakt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $p > 1$ vorausgesetzt werden. Wir betrachten das Interpolationspaar (L^1,L^q) , wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. $S_1 : L^1 \to L^1$ und $S_q : L^q \to L^q$ seien die Präadjungierten von T_∞ und T_p ([22] , IV , 2.1) . Es ist $\Delta(L^1,L^q)$ dicht in L^1 und L^q,und nach 1.7 läßt sich daher der Dual $\Sigma(L^1,L^q)'$ mit $L^p \cap L^\infty$ identifizieren. Für alle $f \in L^p \cap L^\infty$ und alle $g \in \Delta$ gilt

$$\langle f, S_1 g\rangle = \langle T_\infty f, g\rangle = \langle T_p f, g\rangle = \langle f, S_q g\rangle \quad .$$

Daraus folgt die Gleichheit $S_1 g = S_q g$ mit Hilfe des Theorems von Hahn - Banach. Es lassen sich also S_1 und S_q als stetige Fortsetzungen eines linearen Operators $S_0 : L_0 \to M$ auffassen. Außerdem ist S_1 kompakt. Nach 2.3 ist somit für jedes $s \in]1,q[$ die Fortsetzung $S_s : L^s \to L^s$ von S_0 kompakt. Die Adjungierte $S_s' : L^r \to L^r$ ($\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$) stimmt mit T_r überein. Es ist nämlich für jedes $f \in L^r$ (mit $f = f_p + f_\infty$ für geeignetes $f_p \in L^p$ und $f_\infty \in L^\infty$) und $g \in L^1 \cap L^q$

$$\langle S_s' f, g\rangle = \langle f, S_s g\rangle = \langle f_p, S_q g\rangle + \langle f_\infty, S_1 g\rangle$$

$$= \langle T_p f_p, g\rangle + \langle T_\infty f_\infty, g\rangle = \langle T_r f, g\rangle \quad .$$

Wegen der Dichtheit von $L^1 \cap L^q$ in L^s folgt daraus $S_s' f = T_r f$. Also ist T_r kompakt. ∎

Die Aussage von 2.3 und 2.4 läßt sich nicht auf das jeweilige abgeschlossene Intervall erweitern, wie das folgende von Dayanithy [4] konstruierte Beispiel zeigt.

2.5 BEISPIEL. Wir definieren ein Maß μ auf $\mathbb{N}$ durch $\mu(\{n\}) = \frac{1}{(n!)^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei T der lineare Operator, der jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $\left(\frac{1}{n+1}\, x_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zuordnet. In [4] wird gezeigt, daß T

für alle $p \geq 2$ eine stetige Restriktion $T_p : L^p \to L^p$ besitzt. Wir zeigen nun, daß T_p für alle $p > 2$ kompakt ist, T_2 jedoch nicht. Dazu betrachten wir für jedes $m \geq 2$ den kompakten Operator

$$T_p^{(m)} : L^p \to L^p \; ; \; (x_n) \mapsto \left(\frac{x_2}{2} , \frac{x_3}{3} , \ldots , \frac{x_m}{m} , 0 , \ldots \right) .$$

Es gilt für $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p$

$$\| (T_p - T_p^{(m)}) x \|_p = \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{|x_{n+1}|^p}{(n+1)!^2} \cdot (n+1)^{2-p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq (m+1)^{\frac{2}{p} - 1} \cdot \|x\|_p$$

$$\left(\| (T_\infty - T_\infty^{(m)}) x \|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x_{m+n}|}{m+n} \leq \frac{\|x\|_\infty}{m+1} \right) .$$

Daraus folgt für $p > 2$ $\lim_{m \to \infty} T_p^{(m)} = T_p$, also ist T_p kompakt. Der Operator T_2 ist dagegen nicht kompakt, da sein Spektrum überabzählbar ist. Es ist nämlich jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < 1$ Eigenwert von T_2. Ein zugehöriger Eigenvektor für $\lambda \neq 0$ ist $(\lambda^{n-1} n!)_{n \in \mathbb{N}} \in L^2$. Die Folge $(1,0,0,\ldots)$ ist Eigenvektor zu $\lambda = 0$.

2.6 BEMERKUNG. Es wurde bei den vorangegangenen Überlegungen entscheidender Gebrauch gemacht von den in Kapitel 1 bereitgestellten Methoden bzw. dem Rieszschen

Konvexitätssatz. Daraus resultierte die Notwendigkeit, komplexe L^p - Räume zu betrachten. Wir wollen nun zeigen, daß die Aussagen von 2.1,2.3 und 2.4 auch für reelle L^p - Räume gelten. Den jeweiligen Skalarkörper fügen wir im folgenden den Räumen als Index bei.

Der Rieszsche Konvexitätssatz gilt für den reellen Fall im allgemeinen nicht (vgl. dazu [28]) . Jedoch besitzt ein linearer Operator $T_0 : (L_0)_{\mathbb{R}} \to M_{\mathbb{R}}$ mit stetigen Fortsetzungen $T_p : L^p_{\mathbb{R}} \to L^p_{\mathbb{R}}$ und $T_q : L^q_{\mathbb{R}} \to L^q_{\mathbb{R}}$ ($1 \leq p < q \leq \infty$) ebenfalls eine stetige Fortsetzung $T_r : L^r_{\mathbb{R}} \to L^r_{\mathbb{R}}$ für $r \in]p,q[$. Dazu betrachten wir die stetigen Fortsetzungen $\hat{T}_p : L^p_{\mathbb{C}} \to L^p_{\mathbb{C}}$ und $\hat{T}_q : L^q_{\mathbb{C}} \to L^q_{\mathbb{C}}$ von T_p und T_q auf die entsprechenden Komplexifizierungen und wenden den Rieszschen Konvexitätssatz an. $\hat{T}_r(L^r_{\mathbb{R}})$ enthält $\hat{T}_r(\Delta_{\mathbb{R}})$ dicht,und es ist $\hat{T}_r(\Delta_{\mathbb{R}}) \subset \Delta_{\mathbb{R}} \subset L^r_{\mathbb{R}}$. Da $L^r_{\mathbb{R}}$ abgeschlossen in $L^r_{\mathbb{C}}$ ist,gilt $\hat{T}_r(L^r_{\mathbb{R}}) \subset L^r_{\mathbb{R}}$. $T_r := \hat{T}_r | L^r_{\mathbb{R}}$ besitzt die gewünschten Eigenschaften. Offenbar ist ein beschränkter Operator auf einem reellen L^p - Raum genau dann kompakt,wenn seine Fortsetzung auf die Komplexifizierung kompakt ist. Entsprechendes gilt im Fall $p = \infty$ für die schwach* - Stetigkeit. Mit Hilfe dieser Beobachtungen lassen sich die zu 2.3 und 2.4 analogen Aussagen für reelle L^p - Räume auf den komplexen Fall zurückführen. Ähnliche Überlegungen führen zu einem 2.1 entsprechenden Resultat für reelle Räume $L^p_{\mathbb{R}}$ und $L^q_{\mathbb{R}}$ sowie einen reellen Banachraum E.

Hierzu betrachten wir noch die folgende Anwendung.

2.7 BEISPIEL. Es sei (X,Σ,μ) ein endlicher Maßraum, $T_0 : (L_0)_{\mathbb{R}} \to M_{\mathbb{R}}$ ein linearer Operator mit stetigen Fortsetzungen $T_p : L^p_{\mathbb{R}} \to L^p_{\mathbb{R}}$ ($1 < p < \infty$) und $T_1 : L^1_{\mathbb{R}} \to L^1_{\mathbb{R}}$ (oder $T_\infty : L^\infty_{\mathbb{R}} \to L^\infty_{\mathbb{R}}$) . Ferner sei T_1 (T_∞) schwach kompakt. Nach [21],II,9.9,Cor.1 ist dann T_1^2 (T_∞^2) kompakt. Im Sinne der obigen Bemerkung 2.6 folgt damit aus 2.3 die Kompaktheit von T_r^2 für alle $r \in]1,p[$ (bzw. $]p,\infty[$) .

KAPITEL 3

Das Spektrum beschränkter Operatoren auf Interpolationsräumen

Ausgehend von einem Interpolationspaar (B_0,B_1) komplexer Banachräume und einem linearen Operator $T : \Sigma(B_0,B_1) \to \Sigma(B_0,B_1)$ wird im vorliegenden Kapitel das Spektrum der Restriktionen $T_\Theta : B_\Theta \to B_\Theta$ von T in Abhängigkeit von Θ untersucht. Dies geschieht vor allem im Hinblick auf die Interpolation von L^p - Räumen.

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit der Formulierung eines Resultats von Šneĭberg [25] in 3.3 . Die ersten beiden Lemmata dienen zur Vorbereitung desselben. Trotz hohen technischen Aufwandes werden diese Ergebnisse ausführlich bewiesen,da die Arbeit nur im russischen Original vorliegt und zudem schwer zugänglich ist. Die von Šneĭberg angegebene Ungleichung wird sich als Schlüssel erweisen zu einigen Aussagen über die Invertierbarkeit und das Spektrum der Operatoren T_0 . Es müssen dazu einschränkende Voraussetzungen über das Interpolationspaar (B_0,B_1) gemacht werden,die jedoch für L^p - Räume zumeist erfüllt sind. Eine Sonderbetrachtung erfordern nur die Räume L^1 und L^∞ .

In 3.4 wird gezeigt,daß die Menge derjenigen $\Theta \in]0,1[$, für die T_Θ invertierbar ist,offen in $]0,1[$ liegt. Wir

geben darüber hinaus eine Abschätzung für $\|T_\theta^{-1}\|$ an. Im allgemeinen ist das Spektrum $\sigma(T_\theta)$ von θ abhängig. Wir werden dies durch Beispiele belegen. Es läßt sich jedoch beweisen, daß die Funktion $\theta \mapsto \sigma(T_\theta)$ auf $]0,1[$ in gewissem Sinne nach oben halbstetig ist. Diese Aussage wird in 3.7 präzisiert werden. Schaefer [23] hat für L^p - Räume im Falle nulldimensionaler Spektren $\sigma(T_0)$ und $\sigma(T_1)$ die Konstanz der Funktion $\theta \mapsto \sigma(T_\theta)$ gezeigt. Wir beschließen das Kapitel mit der Formulierung dieses Resultats.

Es werden zunächst die beiden angekündigten Hilfssätze und im Anschluß daran das Lemma von Šneĭberg bewiesen. Dabei wird in grundlegender Weise von der analytischen Struktur der komplexen Interpolationsmethode Gebrauch gemacht. Für eine andere Interpolationsmethode wurden ähnliche Resultate von Zafran [30] veröffentlicht.

3.1 LEMMA. S° bezeichne wie in Kapitel 1 die Menge $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < \mathrm{Re}\, z < 1 \right\}$. Es sei $\varphi : S^\circ \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $|\varphi(z)| < M$ für alle $z \in S^\circ$ und ein geeignetes $M \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt für alle $w, z \in S^\circ$ die Ungleichung

$$|\varphi(z)| \geq M \cdot \frac{|\varphi(w)| - M \cdot \beta(w,z)}{M - \beta(w,z) \cdot |\varphi(z)|} \quad , \quad \text{wobei}$$

$$\beta(w,z) := \left| \frac{\tan\left[(w - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right] - \tan\left[(z - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right]}{1 - \overline{\tan}\left[(z - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right] \cdot \tan\left[(w - \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right]} \right| .$$

Beweis. Die Funktion $\psi : z \mapsto \tan\left[(z-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right]$ bildet S° konform auf die offene Einheitskreisscheibe $K_1(0)$ in $\mathbb{C}$ ab ([10],V.6) . Es ist deshalb $f := \frac{1}{M}\,\varphi \circ \psi^{-1}$ holomorph auf $K_1(0)$,und außerdem gilt für alle $\zeta \in K_1(0)$ $|f(\zeta)| < 1$. Nach einer Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas ([6],VIII.1) erhält man somit für alle $\eta,\zeta \in K_1(0)$

$$\left|\frac{f(\eta) - f(\zeta)}{1 - \overline{f(\zeta)}\cdot f(\eta)}\right| \leq \left|\frac{\eta - \zeta}{1 - \bar{\zeta}\cdot\eta}\right| \quad .$$

Mit Hilfe der Ungleichung

$$\frac{|a| - |b|}{1 - |a|\cdot|b|} \leq \frac{|a + b|}{|1 + \bar{a}\cdot b|} \qquad (a,b \in K_1(0))$$

läßt sich daraus die folgende Abschätzung gewinnen.

$$|f(\zeta)| \geq \frac{|f(\eta)| - \left|\frac{\eta - \zeta}{1 - \bar{\zeta}\cdot\eta}\right|}{1 - |f(\eta)|\cdot\left|\frac{\eta - \zeta}{1 - \bar{\zeta}\cdot\eta}\right|} \quad .$$

Wählen wir nun für beliebige $w,z \in S^\circ$ $\eta := \psi(w)$ und $\zeta := \psi(z)$, so erhalten wir hieraus die behauptete Ungleichung. ∎

3.2 LEMMA. Es sei (B_0,B_1) ein komplexes Interpolationspaar und $\Delta(B_0,B_1)$ dicht in B_0 und B_1. Ferner sei mindestens einer der Räume B_0 und B_1 reflexiv.

Für jedes $f \in F(B_0,B_1) =: F$ und alle $\theta_0,\theta \in]0,1[$ gilt die Abschätzung

$$\|f(\theta)\|_\theta \geq \|f\|_F \cdot \frac{\|f(\theta_0)\|_{\theta_0} - \beta(\theta_0,\theta)\cdot\|f\|_F}{\|f\|_F - \beta(\theta_0,\theta)\cdot\|f(\theta_0)\|_{\theta_0}} .$$

Dabei ist die Funktion β wie in 3.1 definiert. Es gilt

$$\beta(\theta_0,\theta) = \left| \frac{\tan(\theta_0\frac{\pi}{2}) - \tan(\theta\frac{\pi}{2})}{\tan(\theta_0\frac{\pi}{2}) + \tan(\theta\frac{\pi}{2})} \right| .$$

Beweis. $G(B_0,B_1)$ bezeichne den Raum aller $f \in F$ mit Werten in $\Delta(B_0,B_1)$, die holomorph sind als Funktionen von S° nach $\Delta(B_0,B_1)$. In [1],4.2.3 wird gezeigt,daß $G(B_0,B_1)$ dicht in F ist. Wir zeigen die behauptete Ungleichung zunächst für $g \in G(B_0,B_1)$.
Nach dem Theorem von Hahn - Banach existiert ein $\phi \in B'_{\theta_0}$ mit $\|\phi\|_{B'_{\theta_0}} = 1$ und $\langle g(\theta_0),\phi\rangle = \|g(\theta_0)\|_{\theta_0}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ läßt sich wegen Lemma 1.8 ein $h \in F(B'_0,B'_1) =: \hat{F}$ finden,sodaß $h(\theta_0) = \phi$ und $\|h\|_{\hat{F}} < 1 + \varepsilon$. Für jedes $z \in S^\circ$ ist $h(z) \in B'_{Rez}$, wie man durch Betrachtung der Funktion

$$\tilde{h} : S \to \Sigma(B'_0,B'_1) \quad ; \quad w \mapsto h(w + i\cdot \mathrm{Im}\, z)$$

einsieht. Es ist nämlich $\tilde{h} \in F(B'_0,B'_1)$ und $\tilde{h}(Rez) = h(z)$.

Ferner gilt $\|h(z)\|_{B'_{Rez}} \leq \|h\|\hat{}_F < 1 + \varepsilon$.

Wir definieren nun eine Funktion $\varphi : S^\circ \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(z) := \langle g(z) , h(z) \rangle .$$

Es ist nach Lemma 1.7 $h : S \to \Delta(B_0,B_1)'$ holomorph auf S°, ebenso $g : S \to \Delta(B_0,B_1)$. Daraus folgt die Holomorphie von φ, und es gilt außerdem für alle $z \in S^\circ$

$$|\varphi(z)| \leq \|h(z)\|_{B'_{Rez}} \cdot \|g(z)\|_{B_{Rez}} < (1 + \varepsilon) \cdot \|g\|_F .$$

Wegen $\varphi(\Theta_0) = \|g(\Theta_0)\|_{\Theta_0}$ und $|\varphi(\Theta)| < (1 + \varepsilon) \cdot \|g(\Theta)\|_\Theta$ erhalten wir damit aus 3.1

$$\|g(\Theta)\|_\Theta > \|g\|_F \cdot \frac{\|g(\Theta_0)\|_{\Theta_0} - (1 + \varepsilon)\cdot\beta(\Theta_0,\Theta) \cdot \|g\|_F}{(1 + \varepsilon) \cdot \|g\|_F - \beta(\Theta_0,\Theta) \cdot \|g(\Theta_0)\|_{\Theta_0}} .$$

Für $\varepsilon \to 0$ ergibt sich daraus die behauptete Ungleichung. Sei jetzt $f \in F$ beliebig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in G(B_0,B_1)$ mit $\|f - g\|_F < \varepsilon$. Wir erhalten somit

$$\|f(\Theta)\|_\Theta > \|g(\Theta)\|_\Theta - \varepsilon \geq \|g\|_F \cdot \frac{\|g(\Theta_0)\|_{\Theta_0} - \beta(\Theta_0,\Theta)\cdot\|g\|_F}{\|g\|_F - \beta(\Theta_0,\Theta)\cdot\|g(\Theta_0)\|_{\Theta_0}} - \varepsilon$$

und wegen $\|g(\Theta_0)\|_{\Theta_0} > \|f(\Theta_0)\|_{\Theta_0} - \varepsilon$ sowie $\|g\|_F < \|f\|_F + \varepsilon$

$$\|f(\Theta)\|_\Theta > (\|f\|_F + \varepsilon) \cdot \frac{\|f(\Theta_0)\|_{\Theta_0} - \varepsilon - \beta(\Theta_0,\Theta)\cdot(\|f\|_F + \varepsilon)}{\|f\|_F + \varepsilon - \beta(\Theta_0,\Theta)\cdot(\|f(\Theta_0)\|_{\Theta_0} - \varepsilon)} - \varepsilon .$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ schließt den Beweis ab. ∎

Für einen linearen Operator T auf einem Banachraum B gelte im folgenden die Abkürzung

$$\gamma(T) := \inf \left\{ \frac{\|Tx\|_B}{\|x\|_B} \;\middle|\; x \in B \,,\; x \neq 0 \right\} .$$

3.3 LEMMA. Es liege die Situation von 3.2 vor. Ferner sei $T : \Sigma(B_0,B_1) \to \Sigma(B_0,B_1)$ ein linearer Operator mit stetigen Restriktionen $T_0 : B_0 \to B_0$ und $T_1 : B_1 \to B_1$. Für alle $\theta_0,\theta \in]0,1[$ gilt mit $K := \max\left(\|T_0\| , \|T_1\|\right)$

$$\gamma(T_\theta) \geq K \cdot \frac{\gamma(T_{\theta_0}) - \beta(\theta_0,\theta)\cdot K}{K - \beta(\theta_0,\theta)\cdot\gamma(T_{\theta_0})} .$$

Dabei bezeichnen T_{θ_0} und T_θ die Restriktionen von T auf die Interpolationsräume B_{θ_0} und B_θ.

Beweis. Sei $x \in B_\theta$ und $\|x\|_\theta = 1$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $f \in F(B_0,B_1)$ mit $f(\theta) = x$ und $\|f\|_F < 1 + \varepsilon$. Wir definieren eine Funktion $g : S \to \Sigma$ durch $g(z) := T(f(z))$ für alle $z \in S$. Wegen der Stetigkeit von $T : \Sigma \to \Sigma$ (vgl. dazu Beweis von 1.2) ist $g \in F$, und es gilt $\|g\|_F < K\cdot(1 + \varepsilon)$. Aus Lemma 3.2 folgt damit die Abschätzung

$$\|Tx\|_\Theta = \|g(\Theta)\|_\Theta > K\cdot(1+\varepsilon)\cdot\frac{\|g(\Theta_0)\|_{\Theta_0} - \beta(\Theta_0,\Theta)\cdot K\cdot(1+\varepsilon)}{K\cdot(1+\varepsilon) - \beta(\Theta_0,\Theta)\cdot\|g(\Theta_0)\|_{\Theta_0}} .$$

Es ist ferner

$$\|g(\Theta_0)\|_{\Theta_0} = \|T(f(\Theta_0))\|_{\Theta_0} \geq \gamma(T_{\Theta_0})\cdot\|f(\Theta_0)\|_{\Theta_0}$$

und damit wiederum nach 3.2

$$\|g(\Theta_0)\|_{\Theta_0} > \gamma(T_{\Theta_0})\cdot(1+\varepsilon)\cdot\frac{1-\beta(\Theta_0,\Theta)\cdot(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon-\beta(\Theta_0,\Theta)} =: \tau(\varepsilon) .$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|Tx\|_\Theta > K\cdot(1+\varepsilon)\cdot\frac{\tau(\varepsilon) - \beta(\Theta_0,\Theta)\cdot K\cdot(1+\varepsilon)}{K\cdot(1+\varepsilon) - \beta(\Theta_0,\Theta)\cdot\tau(\varepsilon)} ,$$

woraus wegen $\tau(\varepsilon) \to \gamma(T_{\Theta_0})$ für $\varepsilon \to 0$ die behauptete Ungleichung folgt. ∎

Die nachfolgenden Resultate formulieren wir konkret für L^p - Räume, obwohl die allgemeinere Bezeichnungsweise der Interpolationstheorie beibehalten werden könnte. Anders als in Kapitel 2 werden hier keine spezifisch maßtheoretischen Argumente verwendet. Die entsprechende Übertragung der Aussagen und Beweisschritte auf den allgemeineren Fall ist evident.

Wir betrachten einen beliebigen Maßraum (X,Σ,μ) und

einen linearen Operator $T_0 : L_0 \to M$ mit stetigen Fortsetzungen $T_p : L^p \to L^p$ und $T_q : L^q \to L^q$, wobei $p,q \in]1,\infty[$ ($p,q \in [1,\infty[$, falls (X,Σ,μ) endlich ist). Es sei

$$K := \max \left(\|T_p\| , \|T_q\| \right) ,$$

und für jedes $r \in [p,q]$ (bzw. $[q,p]$) mit invertierbarem T_r definieren wir

$$\omega_r := \frac{K \cdot \|T_r^{-1}\| - 1}{K \cdot \|T_r^{-1}\| + 1} .$$

Es ist dann $0 \leq \omega_r < 1$ wegen

$$K \cdot \|T_r^{-1}\| = \frac{K}{\gamma(T_r)} \geq \frac{K}{\|T_r\|} \geq 1 .$$

Mit diesen Bezeichnungen formulieren wir die folgende Aussage.

3.4 SATZ. Es sei für $\theta_0 \in]0,1[$ und $\frac{1}{r_0} = \frac{1-\theta_0}{p} + \frac{\theta_0}{q}$ der Operator T_{r_0} invertierbar auf L^{r_0}. Dann ist T_r invertierbar auf L^r für alle r aus einer offenen Umgebung von r_0, die durch die folgenden Ungleichungen für den zugehörigen Parameterwert $\theta \in]0,1[$ ($\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$) definiert wird.

$$\frac{2}{\pi} \arctan \left[\omega_{r_0} \cdot \tan(\theta_0 \tfrac{\pi}{2}) \right] < \theta < \frac{2}{\pi} \arctan \left[\frac{1}{\omega_{r_0}} \cdot \tan(\theta_0 \tfrac{\pi}{2}) \right]$$

(bzw. $0 < \Theta < 1$, falls $\omega_{r_0} = 0$) .

In diesem Fall gilt außerdem die Ungleichung

$$\|T_r^{-1}\| \leq \frac{K \cdot \|T_{r_0}^{-1}\| - \beta(\Theta_0,\Theta)}{K - \beta(\Theta_0,\Theta)\cdot K^2 \cdot \|T_{r_0}^{-1}\|} \quad .$$

Beweis. Das Interpolationspaar (L^p,L^q) und der Operator T (Fortsetzung von T_0 auf $\Sigma(L^p,L^q)$) genügen den Voraussetzungen von Lemma 3.3 . Daher ist für alle $\Theta \in]0,1[$ mit $\gamma(T_{r_0}) > \beta(\Theta_0,\Theta)\cdot K$ wegen $\beta(\Theta_0,\Theta) < 1$ und $\gamma(T_{r_0}) \leq K$ $\gamma(T_r) > 0$. Es ist also T_r injektiv und besitzt eine stetige Inverse

$$T_r^{-1} : T_r[L^r] \to L^r \quad ,$$

woraus die Abgeschlossenheit von $T_r[L^r]$ in L^r folgt. Angenommen, $T_r[L^r] \neq L^r$. Dann existiert nach Hahn - Banach ein $\phi \in (L^r)'$ ($\phi \neq 0$) mit $\phi[T_r[L^r]] = \{0\}$. Es folgt für alle $f \in L^r$

$$< T_r f , \phi > = < f , T_r' \phi > = 0 \quad ,$$

wobei T_r' den adjungierten Operator zu T_r bezeichne. Es gilt somit $T_r' \phi = 0$.

Aus 1.7 folgt wegen

$$< T_p' f , g > = < f , T_p g > = < f , T_q g > = < T_q' f , g >$$

für alle $f \in (L^p)' \cap (L^q)'$ und $g \in L^p \cap L^q$, daß T_p' und T_q' auf $(L^p)' \cap (L^q)'$ übereinstimmen. Lemma 3.3 gilt also entsprechend für das Interpolationspaar

$((L^p)', (L^q)')$ und die adjungierten Operatoren T'_p und T'_q . Wie im Beweis von 2.4 zeigt man,daß die entsprechende Fortsetzung auf $(L^r)'$ gerade T'_r ist. Wegen

$$\gamma(T'_{r_0}) = \frac{1}{\|(T'_{r_0})^{-1}\|} = \frac{1}{\|T_{r_0}^{-1}\|} = \gamma(T_{r_0})$$

erhält man daher den Widerspruch $\gamma(T'_r) > 0$. Es ist damit gezeigt,daß T_r bijektiv ist,falls $\gamma(T_{r_0}) > \beta(\Theta_0,\Theta) \cdot K$. Man rechnet leicht nach,daß diese Bedingung genau dann erfüllt ist,wenn Θ zwischen den im Satz angegebenen Schranken liegt. Die Abschätzung für $\|T_r^{-1}\|$ erhält man unmittelbar aus Lemma 3.3 .∎

Im Falle eines endlichen Maßraumes läßt sich das Resultat wie folgt erweitern.

3.5 KOROLLAR. Es sei (X,Σ,μ) ein endlicher Maßraum , $T_0 : L_0 \to M$ ein linearer Operator mit stetigen Fortsetzungen $T_p : L^p \to L^p$ $(1 < p < \infty)$ und $T_\infty : L^\infty \to L^\infty$. Außerdem sei T_∞ schwach* stetig. Für $\Theta_0 \in]0,1[$ und $\frac{1}{r_0} = \frac{1-\Theta_0}{p}$ sei T_{r_0} invertierbar auf L^{r_0}. Dann gelten die Aussagen von 3.4 entsprechend mit $\frac{1}{r} = \frac{1-\Theta}{p}$ und $K := \max\left(\|T_p\| , \|T_\infty\|\right)$.

Beweis. Es seien $S_1 : L^1 \to L^1$ und $S_q : L^q \to L^q$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ die Präadjungierten von T_∞ und T_p. Wir haben im Beweis von 2.4 gezeigt,daß S_1 und S_q als ste-

tige Fortsetzungen eines linearen Operators $S_0 : L_0 \to M$ aufgefaßt werden können. Es ist $K = \max\left(\|S_1\|, \|S_q\|\right)$ sowie $L^{r_0} = (L^{s_0})'$, wobei $\frac{1}{s_0} = \frac{1-\theta_0}{q} + \frac{\theta_0}{1}$. S_{s_0} als Präadjungierte von T_{r_0} (vgl. hierzu Beweis von 2.4) ist auf L^{s_0} invertierbar, und es gilt $\|S_{s_0}^{-1}\| = \|T_{r_0}^{-1}\|$. Die Anwendung von 3.4 auf das Interpolationspaar (L^q, L^1) und den Operator S_0 liefert die Behauptung.∎

Ergänzend sei bemerkt, daß für $1 \leq p < q \leq \infty$ auch ohne zusätzliche Voraussetzungen aus 3.4 die Offenheit der Menge $\left\{ r \in]p,q[\;\middle|\; T_r \text{ invertierbar} \right\}$ folgt. Für jedes $r_0 \in]p,q[$ mit invertierbarem T_{r_0} betrachte man dazu ein Interpolationspaar (L^s, L^t) mit $p < s < r_0 < t < q$.

Wir wenden uns nun der Untersuchung der Spektren von stetigen Fortsetzungen $T_p : L^p \to L^p$ eines linearen Operators $T_0 : L_0 \to M$ zu. Im allgemeinen sind die Spektren zweier Fortsetzungen T_p und T_q verschieden, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen.

3.6 BEISPIELE. (1) Es sei f eine lokal integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}_+$. Der Cesàro - Operator T ist definiert durch

$$T f(t) := \frac{1}{t} \cdot \int_0^t f(s)\, ds \quad .$$

Boyd hat in [2] gezeigt, daß T für $1 < p \leq \infty$ stetige

Restriktionen $T_p : L^p \to L^p$ besitzt. Das Spektrum von T_p ist

$$\sigma(T_p) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{p-1}{p} \right\} \cup \{0\}$$

$$\left(\sigma(T_\infty) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 \right\} \cup \{0\} \right) .$$

Dies ist ein Kreis in der komplexen Ebene durch Null mit Mittelpunkt in $\frac{p}{2(p-1)}$ ($\frac{1}{2}$ für $p = \infty$) . Die Spektren $\sigma(T_p)$ und $\sigma(T_q)$ für $p \neq q$ schneiden sich also nur im Nullpunkt.

(2) Wir betrachten ein von Dayanithy [4] angegebenes Beispiel, das bereits in 2.5 skizziert wurde. Für die dort definierten Operatoren $T_p : L^p \to L^p$ ($p \geq 2$) berechnen wir nun das Spektrum $\sigma(T_p)$.
Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p$ ist

$$\| T_p^m x \|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_{m+n}|^p}{(m+n)!^2} \cdot \left[\frac{n!}{(m+n)!} \right]^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left[(m+1)! \right]^{\frac{2}{p} - 1} \cdot \| x \|_p \quad .$$

Da für den $(m+1)$ - ten Einheitsvektor Gleichheit gilt, folgt daraus

$$\| T_p^m \| = \left[(m+1)! \right]^{\frac{2}{p} - 1} .$$

Für $p = \infty$ zeigt man leicht direkt

$$\|T_\infty^m\| = \frac{1}{(m+1)!} \quad .$$

Wir erhalten damit für den Spektralradius von T_p

$$r(T_p) = \lim_{m \to \infty} \|T_p^m\|^{\frac{1}{m}} = \begin{cases} 1 & \text{für } p = 2 \\ 0 & \text{für } p > 2 \end{cases} \quad .$$

In 2.5 wurde gezeigt, daß jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < 1$ Eigenwert von T_2 ist. Wir haben daher

$$\sigma(T_2) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| \leq 1 \right\} \quad \text{und} \quad \sigma(T_p) = \{0\} \quad \text{für } p > 2 \; .$$

Mit Hilfe elementarer Eigenschaften logarithmisch konvexer Funktionen ([20] , I,13.F) folgt aus dem Rieszschen Konvexitätssatz, daß die Funktion

$$p \mapsto r(T_p) = \lim_{n \to \infty} \left(\|T_p^n\|^{\frac{1}{n}} \right) ,$$

die jedem p den Spektralradius von T_p zuordnet, logarithmisch konvex ist. Auf dem Inneren des Interpolationsintervalls ist diese Funktion daher stetig. Eine weitere Einschränkung für die Änderung des Spektrums $\sigma(T_p)$ in Abhängigkeit von p liefert das folgende Theorem. Wir zeigen, daß die Funktion $p \mapsto \sigma(T_p)$ im Inneren des Interpolationsintervalls eine Kontinuitätsbedingung erfüllt,

die wir als Halbstetigkeit nach oben interpretieren können.

3.7 THEOREM. (X,Σ,μ) sei ein beliebiger Maßraum und $T_0 : L_0 \to M$ ein linearer Operator mit stetigen Fortsetzungen $T_p : L^p \to L^p$ und $T_q : L^q \to L^q$ ($1 \leq p < q \leq \infty$) . Für $r_0 \in]p,q[$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodaß für alle $r \in]p,q[$ mit $|r - r_0| < \delta$ und alle $\lambda \in \sigma(T_r)$ gilt

$$\operatorname{dist}\left(\lambda , \sigma(T_{r_0})\right) := \inf \left\{ |\lambda - \mu| \;\middle|\; \mu \in \sigma(T_{r_0}) \right\} < \varepsilon \ .$$

Beweis. Angenommen,es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]p,q[$ mit $\lim_{n\to\infty} r_{n_0} = r_0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\lambda_n \in \sigma(T_{r_n})$, sodaß

$$\operatorname{dist}\left(\lambda_n , \sigma(T_{r_0})\right) \geq \varepsilon_0 \quad \text{ist.}$$

Wegen der dem Theorem vorangestellten Überlegung ist die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt durch $\max (r(T_p) , r(T_q))$. Es existiert also eine konvergente Teilfolge von $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Limes λ nicht in $\sigma(T_{r_0})$ liegt.

Für alle $\mu \in \mathbb{C}$ sei

$$K_\mu := \max \left(\|\mu - T_p\| , \|\mu - T_q\| \right) \ .$$

Auf der Resolventenmenge von T_{r_0} definieren wir damit

die folgende Funktion.

$$F : \rho(T_{r_0}) \to \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad \mu \mapsto \frac{1}{K_\mu \cdot \|(\mu - T_{r_0})^{-1}\|} \quad .$$

Wegen der Stetigkeit von F läßt sich ein $\varepsilon > 0$ finden, sodaß für alle $\mu \in \rho(T_{r_0})$ mit $|\mu - \lambda| < \varepsilon$ die Ungleichung

$$F(\mu) > \frac{F(\lambda)}{2} \qquad \text{gilt .}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $1 < p$ und $q < \infty$ ist. Wir definieren die zu r und r_0 gehörigen Parameterwerte Θ und Θ_0 wie in 3.4 . Da die Funktion $\Theta \mapsto \beta(\Theta_0, \Theta)$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodaß

$$\beta(\Theta_0, \Theta) < \frac{F(\lambda)}{2}$$

für alle $r \in]p,q[$ mit $|r - r_0| < \delta$. Wegen $\beta(\Theta_0, \Theta) < F(\mu)$ folgt aus 3.4 die Invertierbarkeit von $(\mu - T_r)$, falls $|\lambda - \mu| < \varepsilon$ und $|r - r_0| < \delta$. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme $\lambda_n \in \sigma(T_{r_n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ∎

Wir beschließen das Kapitel mit einem Theorem von Schaefer [23] , in dem ein hinreichendes Kriterium dafür angegeben wird, daß die Funktion $p \mapsto \sigma(T_p)$ auf dem Interpolationsintervall konstant ist.

3.8 THEOREM. Es sei die Situation von 3.7 gegeben. Falls $q = \infty$ und der Maßraum unendlich ist, so sei außerdem (X,Σ,μ) σ-endlich und T_∞ schwach* stetig. Sind die Spektren $\sigma(T_p)$ und $\sigma(T_q)$ nulldimensional, so gilt für alle $r \in]p,q]$ $\sigma(T_r) = \sigma(T_p)$.

Beweis. [23] .∎

Die Nulldimensionalität ist insbesondere für abzählbare Spektren gegeben. In Verbindung mit 2.3 und 2.4 folgt daraus die Gleichheit der Spektren $\sigma(T_r)$ für alle $r \in [p,q[$ ($]p,q]$) , falls T_p (T_q) kompakt ist.

Wir werden auf die Aussage von 3.8 im nächsten Kapitel in allgemeinerem Zusammenhang zurückkommen und einen von [23] abweichenden Beweis angeben.

KAPITEL 4

Feinstruktur des Spektrums

Die Untersuchungen des vorangegangenen Kapitels werden im folgenden ergänzt durch einige Aussagen über die Interpolationseigenschaften von Teilmengen des Spektrums. Es sei wieder (X,Σ,μ) ein Maßraum und $T_0 : L_0 \to M$ ein linearer Operator,der stetige Fortsetzungen $T_p : L^p \to L^p$ und $T_q : L^q \to L^q$ $(p<q)$ besitze. T bezeichne die entsprechende Fortsetzung $\Sigma \to \Sigma$. In 4.5 und 4.6 wird gezeigt,daß unter geeigneten Voraussetzungen eine isolierte Singularität der Resolvente $R(\lambda,T_p)$ oder $R(\lambda,T_q)$ auch isolierte Singularität von $R(\lambda,T_r)$ für alle $r \in [p,q]$ ist,und darüber hinaus der Singularitätentyp erhalten bleibt. Als Konsequenz dieses Resultats erhalten wir dann eine Aussage über die Interpolation von Fredholmpunkten. Beziehungen zwischen den Fredholmspektren linearer Operatoren auf einem Interpolationspaar von Banachräumen wurden auch in [15] untersucht.

4.1 DEFINITION. Wir betrachten das Interpolationspaar (L^p, L^q) .

(1) T (oder T_0) erfüllt für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Bedingung (R) ("Resolventenbedingung") : $\Leftrightarrow$ Die Resolventen

$R(\lambda,T_p)$ und $R(\lambda,T_q)$ existieren und stimmen auf $\Delta(L^p,L^q)$ überein.

(2) T (oder T_0) erfüllt die Bedingung (R) : $\Leftrightarrow$ Für alle $\lambda \in \rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ gilt die obige Übereinstimmung.

Im allgemeinen ist für $\lambda \in \rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ die Bedingung (R) nicht erfüllt,wie das folgende Beispiel zeigt.

4.2 BEISPIEL. Es sei T der in 3.6.1 definierte Cesàro - Operator mit stetigen Restriktionen $T_p : L^p \to L^p$ für $1 < p \leq \infty$. Boyd [2] hat für alle $\lambda \in \rho(T_p)$ die Resolvente von T_p angegeben. Es ist für

$$\mathrm{Re}\,(\tfrac{1}{\lambda}) < \frac{p-1}{p} \qquad R(\lambda,T_p) = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda^2} P_\lambda \qquad \text{mit}$$

$$P_\lambda x(t) := \int_0^1 s^{-\frac{1}{\lambda}} x(st)\, ds$$

und für $\mathrm{Re}\,(\tfrac{1}{\lambda}) > \frac{p-1}{p}$ $\qquad R(\lambda,T_p) = \frac{1}{\lambda} I - \frac{1}{\lambda^2} Q_\lambda$ $\qquad$ mit

$$Q_\lambda x(t) := \int_1^\infty s^{-\frac{1}{\lambda}} x(st)\, ds$$

(I := Identität auf L^p) .

Falls $\lambda \in \rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ mit

$$(*) \quad \frac{p-1}{p} < \mathrm{Re}\,(\tfrac{1}{\lambda}) < \frac{q-1}{q} \quad ,$$

so erfüllt T für λ nicht die Bedingung (R),denn sonst wäre

$$\int_0^\infty s^{-\frac{1}{\lambda}}\, x(st)\, ds \;=\; 0$$

für alle $x \in L^p \cap L^q$ und alle $t \in \mathbb{R}_+$. Es lassen sich jedoch geeignete Elementarfunktionen $x \in L_0 \subset L^p \cap L^q$ finden,für die diese Gleichung nicht gilt. Die Annahme, daß T für λ die Resolventenbedingung erfüllt,läßt sich auch mit Hilfe der folgenden Bemerkung 4.3.1 widerlegen. Nach 3.6.1 existiert nämlich wegen (*) ein $r \in]p,q[$, sodaß $\lambda \in \sigma(T_r)$ ist.

4.3 BEMERKUNGEN. (1) Falls T die Bedingung (R) erfüllt, so lassen sich die Resolventen $R(\lambda,T_p)$ und $R(\lambda,T_q)$ für $\lambda \in \rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ nach dem Rieszschen Konvexitätssatz auf L^r ($r \in]p,q[$) fortsetzen. Es ist dann $\rho(T_p) \cap \rho(T_q) \subset \rho(T_r)$ bzw. $\sigma(T_r) \subset \sigma(T_p) \cup \sigma(T_q)$.

(2) Im Falle eines endlichen Maßraumes erfüllt T wegen $L^q \subset L^p$ stets die Resolventenbedingung.

(3) T erfüllt für $\lambda \in \rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ genau dann nicht die Resolventenbedingung (R),wenn $(\lambda - T_\Delta)$

($T_\Delta := T_{p|\Delta} = T_{q|\Delta}$) ein Isomorphismus von Δ auf einen echten $\|\cdot\|_\Delta$ - abgeschlossenen Teilraum von Δ ist,d.h. λ im Residualspektrum $R\sigma(T_\Delta)$ liegt. Sei nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Δ mit $\lim_{n\to\infty} \|(\lambda - T_\Delta)x_n\|_\Delta = 0$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \|(\lambda - T_p)x_n\|_p = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \|(\lambda - T_q)x_n\|_q = 0$, woraus wegen der Invertierbarkeit von $(\lambda - T_p)$ und $(\lambda - T_q)$ $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_p = 0 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_q$ folgt,also $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_\Delta = 0$. Der Bildraum $(\lambda - T_\Delta)[\Delta]$ ist jedoch notwendig $\|\cdot\|_p$ - dicht in L^p und $\|\cdot\|_q$ - dicht in L^q (bzw. schwach* dicht,falls $q = \infty$ und (X,Σ,μ) σ - endlich).

Für den Nachweis der Gültigkeit von (R) ist das folgende Kriterium nützlich,das von Halberg und Taylor [7] angegeben wurde.

4.4 LEMMA. T erfülle für $\lambda_0 \in \rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ die Bedingung (R). Dann gilt dies bereits für alle λ aus der λ_0 enthaltenden Zusammenhangskomponente von $\rho(T_p) \cap \rho(T_q)$. Insbesondere ist (R) für alle λ aus der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ erfüllt.

Beweis. Es bezeichne D die Menge aller $\lambda \in \rho(T_p) \cap \rho(T_q)$, für die (R) erfüllt ist. Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus D, die gegen ein beliebiges $\lambda \in \rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ konvergiert. Für alle $x \in \Delta(L^p,L^q) =: \Delta$ ist

$$\lim_{n\to\infty} R(\lambda_n, T_p)\, x = \lim_{n\to\infty} R(\lambda_n, T_q)\, x \in \Delta \quad ,$$

also $\lambda \in D$ und damit D relativ abgeschlossen in $\rho(T_p) \cap \rho(T_q)$. Mit Hilfe der Taylorentwicklungen

$$R(\lambda, T_p) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n\, R(\mu, T_p)^{n+1} \qquad \text{und}$$

$$R(\lambda, T_q) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n\, R(\mu, T_q)^{n+1}$$

für die Resolventen in einer Umgebung von $\mu \in D$ zeigt man, daß D auch relativ offen in $\rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ ist. Jede Zusammenhangskomponente von $\rho(T_p) \cap \rho(T_q)$, die nichtleeren Schnitt mit D besitzt, ist daher ganz in D enthalten.

Die Restriktion T_Δ von T_p und T_q auf Δ ist ein $\|\cdot\|_\Delta$-stetiger Operator. Für alle $\lambda \in \rho(T_\Delta) \cap \rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ gilt die Bedingung (R) , also insbesondere für alle λ mit

$$|\lambda| > \max\left(r(T_\Delta) , r(T_p) , r(T_q) \right) \quad .$$

Daraus folgt der zweite Teil der Behauptung. ∎

4.5 THEOREM. (X,Σ,μ) sei ein beliebiger Maßraum und $T_0 : L_0 \to M$ ein linearer Operator mit stetigen Fortsetzungen T_p und T_q , wobei $p,q \in [1,\infty[$ ($p,q \in [1,\infty]$, falls (X,Σ,μ) endlich ist) .

Es sei λ_0 isolierte Singularität von $R(\lambda,T_p)$, Pol n-ter Ordnung oder wesentliche Singularität. T_0 erfülle ferner für eine geeignete Umgebung U von λ_0 auf $U \setminus \{\lambda_0\}$ die Bedingung (R). Dann ist λ_0 Pol n-ter Ordnung bzw. wesentliche Singularität von $R(\lambda,T_r)$ für alle $r \in [p,q]$ (bzw. $[q,p]$).

Falls λ_0 Pol n-ter Ordnung von $R(\lambda,T_p)$ mit Spektralprojektor endlichen Ranges ist, so gilt dies auch für $R(\lambda,T_r)$. Außerdem ist dann $\text{Kern } (\lambda_0 - T_r)^n = \text{Kern } (\lambda_0 - T_p)^n$. Die Eigenvektoren von T_p und T_r stimmen in diesem Fall überein.

Beweis. Sei Γ eine geschlossene, positiv orientierte Jordankurve um λ_0 mit Spur in U. Für alle $r \in [p,q]$ ($[q,p]$) und alle $\lambda \in U \setminus \{\lambda_0\}$ existiert nach Bemerkung 4.3.1 die Resolvente $R(\lambda,T_r)$. Die zugehörige Laurententwicklung um λ_0 sei

$$R(\lambda,T_r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k^{(r)}}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(r)} \cdot (\lambda - \lambda_0)^k$$

mit $$P_k^{(r)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \lambda_0)^{k-1} R(\lambda,T_r)\, d\lambda$$

und $$Q_k^{(r)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R(\lambda,T_r)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}}\, d\lambda \quad .$$

T_0 erfüllt für alle $\lambda \in \mathrm{Spur}(\Gamma)$ die Resolventenbedingung. Durch Approximation von Γ durch Polygonzüge folgt daraus, daß $P_k^{(p)}$ und $P_k^{(r)}$ sowie $Q_k^{(p)}$ und $Q_k^{(r)}$ auf $\Delta(L^p, L^r) =: \Delta$ übereinstimmen. Wegen der Dichtheit von Δ in L^p und L^r ist also $P_k^{(p)} = 0$ genau dann, wenn $P_k^{(r)} = 0$, und ebenso $Q_k^{(p)} = 0$ genau dann, wenn $Q_k^{(r)} = 0$. Damit ist der erste Teil des Theorems bewiesen.

Sei nun λ_0 Pol n-ter Ordnung von $R(\lambda, T_p)$, und $P_1^{(p)}$ besitze endlichen Rang. Es ist $P_1^{(p)}[\Delta] = P_1^{(r)}[\Delta]$ dicht in $P_1^{(p)}[L^p]$ und $P_1^{(r)}[L^r]$, also $P_1^{(p)}[L^p] = P_1^{(r)}[L^r] \subset \Delta$ wegen der Endlichdimensionalität von $P_1^{(p)}[\Delta]$. Auf $\mathrm{Kern}\,(\lambda_0 - T_p)^n = \mathrm{Kern}\,(\lambda_0 - T_r)^n$ stimmen T_p und T_r überein. Beide Operatoren besitzen daher zum Eigenwert λ_0 denselben Eigenraum. ∎

4.6 KOROLLAR. Die Aussagen von 4.5 gelten entsprechend auch für $p = \infty$ oder $q = \infty$, falls der Maßraum σ-endlich und T_∞ schwach* stetig ist.

Beweis. Für alle $\lambda \in \rho(T_\infty)$ ist $R(\lambda, T_\infty)$ schwach* stetig. Sei nämlich S die Präadjungierte von T_∞, so gilt

$$R(\lambda, T_\infty) = (R(\lambda, S))' .$$

Als Norm-Limites schwach* stetiger Operatoren sind somit auch die Laurent-Koeffizienten

$$P_k^{(\infty)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - \lambda_0)^{k-1} R(\lambda, T_\infty)\, d\lambda$$

und $$Q_k^{(\infty)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{R(\lambda, T_\infty)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} \, d\lambda \quad .$$

(vgl. Beweis von 4.5). schwach* stetig. Unter Beachtung der schwach* Dichtheit von $\Delta(L^r, L^\infty)$ in L^∞ für jedes $r \in [1, \infty[$ folgt die Behauptung analog zu 4.5 . ∎

Aus 4.5 und 4.6 folgt die Gleichheit der Spektren kompakter Operatoren T_p und T_q . (Die Resolventenbedingung (R) ist in diesem Fall nach Lemma 4.4 erfüllt, da $\rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ zusammenhängend ist) . Auf anderem Wege erhält man diese Aussage aus den Untersuchungen von Schaefer [23] , deren Kernresultat in 3.8 formuliert wurde.

Es bezeichne im folgenden $\rho_\phi(S)$ die Menge aller Fredholmpunkte eines beschränkten Operators S auf einem Banachraum , d.h. es ist

$$\rho_\phi(S) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; (\lambda - S) \text{ ist Fredholmoperator} \right\} \quad .$$

Das Komplement $\mathbb{C} \setminus \rho_\phi(S) =: \sigma_\phi(S)$ nennen wir das Fredholmspektrum von S . Im folgenden Theorem wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben,daß verschiedene Fortsetzungen T_p eines linearen Operators $T_0 : L_0 \to M$ dieselben Fredholmspektren besitzen.

4.7 THEOREM. Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $T_0 : L_0 \to M$ ein linearer Operator mit stetigen Fortsetzungen

T_p und T_q ($1 \leq p < q \leq \infty$) . Falls der Maßraum unendlich ist,seien für $q = \infty$ zusätzlich die Voraussetzungen von 4.6 erfüllt. Sind die Fredholmspektren $\sigma_\phi(T_p)$ und $\sigma_\phi(T_q)$ nulldimensional,so gilt $\sigma_\phi(T_p) = \sigma_\phi(T_r)$ für alle $r \in]p,q]$.

Beweis. Es ist $\rho_\phi(T_p)$ zusammenhängend ([10] , Thm. IV.4). Nach Satz 51.3 und Satz 51.5 in [9] sind für jedes $\lambda_0 \in \rho_\phi(T_p)$ Bild- und Nullkettenlänge von $(\lambda_0 - T_p)$ endlich. Also ist λ_0 entweder Resolventenpunkt von T_p oder Pol der Resolvente $R(\lambda,T_p)$ mit Spektralprojektor endlichen Ranges. Die Menge $\rho_\phi(T_p) \setminus \rho(T_p)$ besteht somit nur aus isolierten Punkten,und es ist daher das Spektrum $\sigma(T_p)$ nulldimensional. Entsprechendes gilt für T_q. Nach 3.8 ist damit $\rho(T_p) = \rho(T_r)$ für alle $r \in]p,q]$. Außerdem ist $\rho(T_p)$ zusammenhängend,und T_0 erfüllt deshalb wegen Lemma 4.4 die Bedingung (R). Für jedes $\lambda_0 \in \rho_\phi(T_p)$ existiert eine Umgebung U mit $U \setminus \{\lambda_0\} \subset \rho(T_r)$ für alle $r \in [p,q]$. Also ist nach 4.5 bzw. 4.6 $\lambda_0 \in \rho_\phi(T_r)$. Analog zeigt man $\rho_\phi(T_r) \subset \rho_\phi(T_p)$.∎

Ohne die Forderung der Nulldimensionalität der Fredholmspektren ist die Aussage des Theorems im allgemeinen nicht richtig,wie Beispiel 3.6.2 zeigt. Wäre dort für $p > 2$ $\sigma_\phi(T_2) = \sigma_\phi(T_p)$ ($= \{0\}$) , so müßte auch das Spektrum $\sigma(T_2)$ nulldimensional sein,denn $\sigma(T_2) \setminus \sigma_\phi(T_2)$

könnte nur aus isolierten Punkten bestehen.

Zu den Betrachtungen dieses Kapitels erörtern wir abschließend einen übergeordneten Aspekt (vgl. [24] , [26]) . In diesem Rahmen wird auch der angekündigte Beweis von Theorem 3.8 nachgeholt. Wir betrachten zwei Banachalgebren A_0 und A_1 mit Einheiten e_0 und e_1 , die beide stetig in einen separierten topologischen Vektorraum V eingebettet sind. Es sei ferner $e_0 = e_1 =: e$ in V . In Analogie zu Definition 4.1 führen wir die Resolventenbedingung (R) ein.

4.8 DEFINITION. (1) Ein Element $a \in A_0 \cap A_1$ erfüllt für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Bedingung (R) : $\Leftrightarrow$ $(\lambda e - a)$ ist in A_0 und in A_1 invertierbar,und es gilt

$$(\lambda e - a)^{-1}_{A_0} = (\lambda e - a)^{-1}_{A_1} \quad \text{in } V .$$

(2) $a \in A_0 \cap A_1$ erfüllt die Bedingung (R) : $\Leftrightarrow$ Für alle $\lambda \in \rho_{A_0}(a) \cap \rho_{A_1}(a)$ gilt die obige Übereinstimmung.

4.9 THEOREM. $a \in A_0 \cap A_1$ erfülle die Bedingung (R) . Für jede Spektralmenge σ von $\sigma_{A_0}(a)$ ist dann $\sigma \cap \sigma_{A_1}(a)$ nichtleer. Ist insbesondere $\sigma_{A_0}(a)$ nulldimensional,so gilt $\sigma_{A_0}(a) \subset \sigma_{A_1}(a)$.

Beweis. Angenommen $\sigma \cap \sigma_{A_1}(a)$ ist leer. Es sei Γ eine geschlossene, positiv orientierte Jordankurve, die σ einerseits und die Mengen $\sigma_{A_0}(a) \setminus \sigma$ und $\sigma_{A_1}(a)$ andererseits trennt. Die zu σ gehörige Spektralprojektion in A_0

$$p_\sigma := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda e - a)^{-1}_{A_0} \, d\lambda$$

ist dann verschieden von 0 . Andererseits ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda e - a)^{-1}_{A_1} \, d\lambda = 0 \quad ,$$

da das Innere von Γ zu $\rho_{A_1}(a)$ gehört. Wegen der Bedingung (R) folgt daraus der Widerspruch $p_\sigma = 0$ in V. Es ist daher $\sigma \cap \sigma_{A_1}(a)$ nichtleer.

Sei nun $\sigma_{A_0}(a)$ nulldimensional , $\lambda \in \sigma_{A_0}(a)$ und U eine Umgebung von λ in $\mathbb{C}$. Da $\sigma_{A_0}(a)$ nulldimensional ist, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $\sigma := U \cap \sigma_{A_0}(a)$ offen - abgeschlossen in $\sigma_{A_0}(a)$ ist. Es folgt dann $\sigma \cap \sigma_{A_1}(a)$ nichtleer, also $\lambda \in \sigma_{A_1}(a)$ wegen der Abgeschlossenheit von $\sigma_{A_1}(a)$. ∎

Als Anwendung von 4.9 beweisen wir nun die Aussage von Theorem 3.8 .

4.10 KOROLLAR. Es sei (X,Σ,μ) ein Maßraum, $T_0 : L_0 \to M$ ein linearer Operator mit stetigen Fortsetzungen $T_p : L^p \to L^p$ und $T_q : L^q \to L^q$ ($1 \le p < q \le \infty$). Falls $q = \infty$ und der Maßraum unendlich ist, so sei außerdem (X,Σ,μ) σ-endlich und T_∞ schwach* stetig. Sind die Spektren $\sigma(T_p)$ und $\sigma(T_q)$ nulldimensional, so gilt für alle $r \in]p,q[$ $\sigma(T_r) = \sigma(T_p)$.

Beweis. Wir betrachten die Banachalgebren $A_0 := \mathcal{L}(L^p)$ und $A_1 := \mathcal{L}(L^q)$ bzw. $A_1 := \left\{ T \in \mathcal{L}(L^\infty) \;\middle|\; T \text{ schwach* stetig} \right\}$ in dem oben formulierten Sonderfall. Mit $\Delta := \Delta(L^p,L^q)$ und $\Sigma := \Sigma(L^p,L^q)$ definieren wir den normierten Raum $V := \mathcal{L}(\Delta,\Sigma)$. Mittels der Abbildung, die jedem Operator aus A_0 oder A_1 seine Restriktion auf Δ zuordnet, sind beide Algebren stetig in V eingebettet. Die Injektivität der Einbettungen folgt aus der Dichtheit (bzw. schwach* Dichtheit) von Δ in L^p und L^q. Außerdem gilt für jedes $T \in A_i$ ($i \in \{0,1\}$) die Ungleichung

$$\|T\|_V = \sup \left\{ \|Tx\|_\Sigma \;\middle|\; x \in \Delta,\ \|x\|_\Delta \le 1 \right\}$$

$$\le \sup \left\{ \|Tx\|_{p,q} \;\middle|\; x \in L^{p,q},\ \|x\|_{p,q} \le 1 \right\} = \|T\|_{A_i}.$$

In diesem Sinne werden die Operatoren T_p und T_q durch dasselbe $T \in V$ repräsentiert. Die Resolventenbedingungen aus den Definitionen 4.1 und 4.8 stimmen für

unser Beispiel überein. T erfüllt die Bedingung (R) somit wegen Lemma 4.4 , da $\rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ zusammenhängend ist ([10] , Thm.III.2 und Thm.IV.4) . Die Gleichheit $\sigma(T_p) = \sigma(T_q)$ folgt damit aus Theorem 4.9 . (Auch im Fall der schwach* stetigen Operatoren ist $\sigma(T_\infty) = \sigma_{A_1}(T)$ - vgl. dazu Beweis von 4.6) . Für jedes $r \in]p,q[$ folgt die Nulldimensionalität von $\sigma(T_r)$ aus Bemerkung 4.3.1 . Analog zu oben zeigt man damit $\sigma(T_r) = \sigma(T_p)$.∎

4.11 KOROLLAR. (X,Σ,μ) sei ein endlicher Maßraum, T_p und T_q wie in 4.10 ($p,q \geq 1$) . Jede Spektralmenge von $\sigma(T_p)$ besitzt nichtleeren Schnitt mit $\sigma(T_q)$. Insbesondere gehört jeder isolierte Punkt von $\sigma(T_p)$ zu $\sigma(T_q)$.

Beweis. Wie im Beweis von Korollar 4.10 definieren wir A_0, A_1 und V . Die Bedingung (R) ist nach 4.3.2 erfüllt. Damit folgt die Behauptung durch Anwendung von Theorem 4.9 .∎

KAPITEL 5

Unbeschränkte Operatoren auf Interpolationsräumen

Wir haben bisher ausschließlich Interpolationseigenschaften beschränkter Operatoren untersucht. Dabei war der Rieszsche Konvexitätssatz bzw. Theorem 1.2 ein zentrales Hilfsmittel. Das Ziel des vorliegenden Kapitels ist es,auch unbeschränkte Operatoren in die Interpolationstheorie einzubeziehen. Dazu gilt es zunächst, ein geeignetes Konzept zu finden,um Fortsetzungen solcher Operatoren auf Interpolationsräume zu definieren.

Wir betrachten zu diesem Zweck ein Interpolationspaar (B_0,B_1) komplexer Banachräume und lineare Operatoren $T_0 : D(T_0) \to B_0$ und $T_1 : D(T_1) \to B_1$, wobei die Definitionsbereiche $D(T_0) \subset B_0$ und $D(T_1) \subset B_1$ beliebige Teilräume seien. Ferner gelte $T_0 = T_1$ auf $D(T_0) \cap D(T_1)$. Mit T bezeichnen wir die (eindeutige) Fortsetzung von T_0 und T_1 auf $D(T) := D(T_0) + D(T_1) \subset \Sigma(B_0,B_1)$. Die Restriktion von T auf einen beliebigen Interpolationsraum B bezüglich (B_0,B_1) läßt im allgemeinen B nicht invariant. Wir definieren daher

$$D(T_B) := \left\{ x \in D(T) \cap B \;\middle|\; Tx \in B \right\} \quad \text{und} \quad T_B := T_{|D(T_B)} .$$

Wegen $\Delta(B_0,B_1) \subset B$ ist $D(T_0) \cap D(T_1) \subset D(T_B)$. Sind insbesondere die Operatoren T_0 und T_1 beschränkt sowie

überall definiert,so erhält man mit Hilfe der obigen Konstruktion die stetige Fortsetzung T_B auf B gemäß Definition 1.1 .

Analog zu Definition 4.1 führen wir die folgende Bezeichnungsweise ein.

5.1 DEFINITION. (1) T erfüllt für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Bedingung (R) oder die Resolventenbedingung : $\Leftrightarrow$ Die Resolventen $R(\lambda,T_0)$ und $R(\lambda,T_1)$ existieren und stimmen auf $\Delta(B_0,B_1)$ überein.
(2) T erfüllt die Bedingung (R) : $\Leftrightarrow$ Für alle $\lambda \in \rho(T_0) \cap \rho(T_1)$ gilt die obige Übereinstimmung.

5.2 BEMERKUNGEN. (1) T erfülle für $\lambda_0 \in \rho(T_0) \cap \rho(T_1)$ die Resolventenbedingung. Dann gilt dies bereits für alle λ aus der λ_0 enthaltenden Zusammenhangskomponente von $\rho(T_0) \cap \rho(T_1)$. Man beweist dies genau wie den ersten Teil von Lemma 4.4 .
(2) Es sei (X,Σ,μ) ein endlicher Maßraum und $B_0 = L^p(\mu)$, $B_1 = L^q(\mu)$ mit $p > q$. Dann ist $B_0 \subset B_1$. Falls $D(T_0) \subset D(T_1)$ ist,so erfüllt T die Resolventenbedingung für alle $\lambda \in \rho(T_0) \cap \rho(T_1)$.

5.3 LEMMA. Gegeben seien ein Interpolationspaar (B_0,B_1) und lineare Operatoren $T_0 : D(T_0) \to B_0$ und $T_1 : D(T_1) \to B_1$ wie oben. Ferner gelte für $\lambda \in \rho(T_0) \cap \rho(T_1)$ die Bedingung (R) . Für jeden

Interpolationsraum B ist dann $\lambda \in \rho(T_B)$ und die stetige Fortsetzung der Resolventen $R(\lambda,T_0)$ und $R(\lambda,T_1)$ auf B ist $R(\lambda,T_B)$.

Beweis. Der Operator $(\lambda - T) : D(T) \to \Sigma$ ist invertierbar. Die Inverse $(\lambda - T)^{-1} : \Sigma \to D(T)$ ist die Fortsetzung von $R(\lambda,T_0)$ und $R(\lambda,T_1)$ auf Σ . Nach Definition 1.1 gilt daher $(\lambda - T)^{-1}[B] \subset D(T) \cap B$, woraus $D(T_B) = (\lambda - T)^{-1}[B]$ folgt.∎

Wir betrachten im folgenden die Interpolationsräume B_θ ($\theta \in]0,1[$) , die in Kapitel 1 definiert wurden, und spezifizieren diese wiederum auf den Fall,daß B_0 und B_1 L^p - Räume eines gegebenen Maßraumes sind. Dies geschieht nicht nur aus Gründen der Konkretisierung, sondern auch deshalb,weil Resultate aus Kapitel 2 verwendet werden,die auf maßtheoretischen Argumenten basieren. In dem beschriebenen Rahmen werden Interpolationseigenschaften der Spektren unbeschränkter Operatoren untersucht. Wir beschränken uns dabei nicht grundsätzlich auf abgeschlossene Operatoren,bemerken jedoch,daß ein unbeschränkter Operator mit nichtleerer Resolventenmenge stets abgeschlossen ist. Zunächst illustrieren wir das Vorangegangene durch ein Beispiel.

5.4 BEISPIEL. Es sei μ das durch $\mu(\{n\}) = \frac{1}{(n!)^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte endliche Maß auf $\mathbb{N}$. Der

lineare Operator

$$T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad ; \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\frac{1}{n+1}\, x_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

besitzt für $p \geq 2$ eine stetige Restriktion $T_p : L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ (vgl. 2.5). Wir setzen in diesem Fall $D(T_p) := L^p(\mu)$. Für $1 \leq p < 2$ definieren wir

$$D(T_p) := \left\{ x \in L^p \;\middle|\; Tx \in L^p \right\} \quad \text{und} \quad T_p := T_{|D(T_p)} .$$

T_p ist dann in L^p dicht definiert, da die finiten Folgen stets in $D(T_p)$ enthalten sind.

Wählen wir nun ein Interpolationspaar (L^p, L^q) mit $1 \leq p < q \leq \infty$, so erhalten wir mit Hilfe der zu Beginn dieses Kapitels beschriebenen Fortsetzungskonstruktion für $r \in]p,q[$ gerade den hier eingeführten Definitionsbereich $D(T_r)$. Es ist nämlich $D(T_q) \subset D(T_p)$. Wegen Bemerkung 5.2.2 folgt damit aus Lemma 5.3

$$\sigma(T_r) \subset \sigma(T_p) \cup \sigma(T_q) .$$

In 3.6.2 wurde für $r \geq 2$ das Spektrum von T_r berechnet. Es ist

$$\sigma(T_2) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| \leq 1 \right\} \quad \text{und} \quad \sigma(T_r) = \{0\} \quad \text{für}$$

$r > 2$. Somit erhalten wir für $1 \leq p < 2$

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| \leq 1 \right\} \subset \sigma(T_p) .$$

In der Tat ist sogar $\sigma(T_p) = \mathbb{C}$, denn für jedes

$p \in [1,2[$ und $\lambda \neq 0$ ist $(\lambda^{n-1} \cdot n!)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ .

5.5 BEMERKUNG. Die Resultate aus Kapitel 4 über isolierte Singularitäten der Resolvente lassen sich auf den Fall unbeschränkter Operatoren auf L^p - Räumen verallgemeinern. Der Beweis von Theorem 4.5 kann dabei unverändert übernommen werden mit der Einschränkung, daß die Fortsetzbarkeit der Resolventen nun durch Lemma 5.3 sichergestellt wird. In 4.6 muß statt der schwach* Stetigkeit von T_∞ die schwach* Stetigkeit aller Resolventen $R(\lambda,T_\infty)$ gefordert werden. Entsprechende Voraussetzungen werden auch in den noch folgenden Theoremen 5.7 und 5.8 gemacht. Es genügt dazu wegen der Normkonvergenz der Reihe

$$R(\lambda,T_\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \, R(\lambda_0,T_\infty)^{n+1}$$

in $\mathcal{L}(L^\infty)$, die schwach* Stetigkeit von $R(\lambda_0,T_\infty)$ für einen Punkt λ_0 jeder Zusammenhangskomponente von $\rho(T_\infty)$ nachzuweisen.

Zur Vorbereitung der Theoreme 5.7 und 5.8 beweisen wir das folgende Resultat aus der Spektraltheorie unbeschränkter Operatoren.

5.6 SATZ. Sei E ein Banachraum und $T : D(T) \to E$ ein linearer Operator auf E sowie $\lambda_0 \in \rho(T)$ beliebig. (Insbesondere sei also $\rho(T)$ nichtleer und damit T abgeschlossen) . $R(\lambda)$ bezeichne die Resolvente von T in einem Punkt $\lambda \in \rho(T)$. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\} \to \mathbb{C}^* \quad ; \quad \lambda \mapsto (\lambda_0 - \lambda)^{-1}$$

definiert eine Bijektion zwischen $\rho(T) \setminus \{\lambda_0\}$ und $\rho(R(\lambda_0)) \setminus \{0\}$ sowie zwischen $\sigma(T)$ und $\sigma(R(\lambda_0)) \setminus \{0\}$.

Beweis. Sei $\lambda \in \rho(T) \setminus \{\lambda_0\}$. Mit Hilfe der Resolventengleichung

$$R(\lambda) - R(\lambda_0) = (\lambda_0 - \lambda) \cdot R(\lambda) \cdot R(\lambda_0)$$

zeigt man,daß der Operator

$$\widetilde{R}(\lambda) := (\lambda_0 - \lambda) \cdot [\, Id + (\lambda_0 - \lambda) \cdot R(\lambda) \,]$$

invers zu $(\lambda_0 - \lambda)^{-1} - R(\lambda_0)$ ist.

Umgekehrt sei $(\lambda_0 - \lambda)^{-1} \in \rho(R(\lambda_0))$ und

$$\widetilde{R}(\lambda) := R[(\lambda_0 - \lambda)^{-1}, R(\lambda_0)] \quad .$$

Dann ist die Resolvente von T gegeben durch

$$R(\lambda) = \frac{R(\lambda_0) \cdot \widetilde{R}(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} \quad ,$$ wie man unter Beachtung der Vertauschbarkeit von $R(\lambda_0)$ und $\widetilde{R}(\lambda)$ leicht verifiziert. Der zweite Teil der Behauptung folgt

durch Komplementbildung.∎

5.7 THEOREM. Es seien (X,Σ,μ) ein Maßraum, $T_p : D(T_p) \to L^p(\mu)$ und $T_q : D(T_q) \to L^q(\mu)$ lineare, auf Teilräumen $D(T_p) \subset L^p(\mu)$ und $D(T_q) \subset L^q(\mu)$ definierte Operatoren, die auf $D(T_p) \cap D(T_q)$ übereinstimmen $(p,q \geq 1)$. Für ein $\lambda_0 \in \rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ sei die Resolvente $R(\lambda_0,T_p)$ kompakt und die Bedingung (R) erfüllt. Falls $p = \infty$ und der Maßraum unendlich ist, so sei zusätzlich (X,Σ,μ) σ-endlich und $R(\lambda_0,T_\infty)$ schwach* stetig. Es ist dann für jedes $r \in]p,q[$ (bzw. $]q,p[$) $\lambda_0 \in \rho(T_r)$ mit kompakter Resolvente $R(\lambda_0,T_r)$. Außerdem ist $\sigma(T_r) = \sigma(T_p)$.

Beweis. Nach Lemma 5.3 ist $\lambda_0 \in \rho(T_r)$, und $R(\lambda_0,T_r)$ ist die stetige Fortsetzung von $R(\lambda_0,T_p)$ und $R(\lambda_0,T_q)$ auf $L^r(\mu)$. Die Kompaktheit von $R(\lambda_0,T_r)$ folgt damit aus Theorem 2.3 bzw. Korollar 2.4. Durch Anwendung von Theorem 3.8 erhalten wir die Gleichheit der Spektren $\sigma(R(\lambda_0,T_r))$ und $\sigma(R(\lambda_0,T_p))$, woraus schließlich mit 5.6 $\sigma(T_r) = \sigma(T_p)$ folgt.∎

5.8 THEOREM. Gegeben seien (X,Σ,μ), T_p und T_q wie in 5.7, wobei $1 \leq p < q \leq \infty$. Die Spektren $\sigma(T_p)$ und $\sigma(T_q)$ seien nulldimensional. Ferner sei für mindestens ein $\lambda_0 \in \rho(T_p) \cap \rho(T_q)$ die Bedingung (R)

erfüllt,und falls $q = \infty$ und der Maßraum unendlich ist,sei (X,Σ,μ) σ-endlich und die Resolvente von T_∞ schwach* stetig. Es ist dann $\sigma(T_r) = \sigma(T_p)$ für alle $r \in]p,q]$.

Beweis. Die Spektren $\sigma(R(\lambda_0,T_p))$ und $\sigma(R(\lambda_0,T_q))$ sind nach Satz 5.6 nulldimensional. Mit Lemma 5.3 und Theorem 3.8 erhalten wir somit die Gleichheit aller Spektren $\sigma(R(\lambda_0,T_r))$ für $r \in [p,q]$. Erneute Anwendung von 5.6 ergibt die Behauptung.∎

5.9 BEISPIEL. Wir betrachten ein reelles Intervall $[a,b]$ und den linearen Differentialoperator T , definiert durch

$$T f = f'' + a_0 f' + a_1 f$$

für geeignete Funktionen f . Dabei seien a_0 und a_1 auf $[a,b]$ stetige,reellwertige Funktionen. Um T als Operator auf $L^p[a,b]$ $(1 \le p \le \infty)$ auffassen zu können, wählen wir den Definitionsbereich

$$D(T_p) := \left\{ f \in L^p \;\middle|\; f' \text{ absolutstetig und } f'' \in L^p ,\; f(a) = f(b) = 0 \right\} ,$$

und es sei T_p die Restriktion von T auf $D(T_p)$. f_1 und f_2 seien die Lösungen der Differentialgleichung

$Tf = 0$ zu den Anfangswerten $f_1(a) = 0$, $f_1'(a) = 1$ und $f_2(b) = 0$, $f_2'(b) = 1$. Für alle $x \in [a,b]$ ist dann die Wronskideterminante gegeben durch

$$W(x) := f_1(x)\cdot f_2'(x) - f_2(x)\cdot f_1'(x)$$

$$= - f_2(a) \cdot \exp\left[- \int_a^x a_0(y)\, dy \right] .$$

Falls $f_2(a) \neq 0$, so ist $W(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$, und T_p ist invertierbar. Für $g \in L^p$ ist

$$T_p^{-1}\, g\,(x) = \int_a^b G(x,y)\cdot g(y)\, dy$$

mit der Green - Funktion

$$G(x,y) := \begin{cases} \dfrac{f_1(x)\cdot f_2(y)}{W(y)} & \text{für } x \leq y \\ \dfrac{f_2(x)\cdot f_1(y)}{W(y)} & \text{für } x \geq y \end{cases}$$

(vgl. [11] , S.148) .

Wegen der Stetigkeit von G auf $[a,b]^2$ ist T_p^{-1} kompakt. Ist $f_2(a) = 0$, so ersetzen wir T_p durch den Operator $T_p - \lambda\cdot Id$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{C}$. Dies ist stets möglich, da die Green - Funktion eine meromorphe Funktion in Abhängigkeit von λ ist ([16] , § 3.8) . In diesem Fall ist λ Resolventenpunkt von

T_p mit kompakter Resolvente.

Die Bedingung (R) ist nach Bemerkung 5.2.2 erfüllt. Wir erhalten somit aus Theorem 5.7 oder Theorem 5.8 die Gleichheit aller Spektren $\sigma(T_p)$ für $p \in [1,\infty]$.

Literatur

[1] Bergh, J. und Löfström, J.
Interpolation Spaces. Springer , Berlin - Heidelberg - New York 1976 .

[2] Boyd, D.W.
The spectrum of the Cesàro operator. Acta Sci. Math. 29 , 31 - 34 (1968) .

[3] Calderón, A.P.
Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Stud. Math. 24 , 113 - 190 (1964) .

[4] Dayanithy, K.
Interpolation of spectral operators. Math. Z. 159 , 1 - 2 (1978) .

[5] Dunford, N. und Schwartz, J.
Linear Operators. Part I : General Theory. Interscience Publ. , New York 1958 .

[6] Goluzin, G.M.
Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Am. Math. Soc. , Providence, R.I. 1969 .

[7] Halberg, C.J.A. und Taylor, A.E.
On the spectra of linked operators. Pac. J. Math. 6 , 283 - 290 (1956) .

[8] Hayakawa, K.
Interpolation by the real method preserves compactness of operators. J. Math. Soc. Japan 21 , 189 - 199 (1969) .

[9] Heuser, H.
Funktionalanalysis. Teubner , Stuttgart 1975 .

[10] Hurewicz, W. und Wallman, H.
Dimension Theory. Princeton University Press , Princeton 1948 .

[11] Kato, T.
Perturbation Theory for Linear Operators. Springer , Berlin - Heidelberg - New York 1976 .

[12] Krasnoselskii, M.A.
On a theorem of M.Riesz. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 131 , 246 - 248 (1960) .

[13] Lions, J.L. und Peetre, J.
Sur une classe d'espaces d'interpolation. Inst. haut. Étud. sci., Publ. math. 19 , 5 - 68 (1964) .

[14] Marcinkiewicz, J.
Sur l'interpolation d'operateurs. C.r. Acad. Sci., Paris 208 , 1272 - 1273 (1939) .

[15] Müller - Horrig, V.
Fredholmspektren verbundener Operatoren. Math. Ann. 243 , 171 - 179 (1979) .

[16] Naimark, M.A.
Linear Differential Operators. Part I : Elementary Theory of L.D.O. . Harrap & Company , London - Toronto - Wellington - Sydney 1967 .

[17] Nehari, Z.
Conformal Mapping. Mc Graw - Hill , New York - Toronto - London 1952 .

[18] Persson, A.
Compact linear mappings between interpolation spaces. Ark. Mat. 5 , 215 - 219 (1964) .

[19] Riesz, M.
Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires. Acta Math. 49 , 465 - 497 (1927) .

[20] Roberts, A.W. und Varberg, D.E.
Convex Functions. Academic Press , New York - London 1973 .

[21] Schaefer, H.H.
Banach Lattices and Positive Operators. Springer , Berlin - Heidelberg - New York 1974 .

[22] Schaefer, H.H.
Topological Vector Spaces (4th print) .
Springer , Berlin - Heidelberg - New York 1980 .

[23] Schaefer, H.H.
Interpolation of spectra. Integral Equations Oper. Theory 3 , 463 - 469 (1980) .

[24] Šneĭberg, I.Ja.
On the solvability of linear equations in interpolation families of Banach spaces. Sov. Math., Dokl. 14 , 1328 - 1331 (1973) .

[25] Šneĭberg, I.Ja.
Spektrale Eigenschaften linearer Operatoren auf Interpolationsfamilien von Banachräumen (Russisch). Mat. Issled. 9 , 214 - 229 (1974) .

[26] Stafney, J.D.
The spectrum of an operator on an interpolation space. Trans. Am. Math. Soc. 144 , 333 - 349 (1969) .

[27] Thorin, G.O.
An extension of a convexity theorem due to M.Riesz. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. 8 , 166 - 170 (1939) .

[28] Thorin, G.O.
Convexity Theorems. Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. 9 , 1 - 57 (1948) .

[29] Triebel, H.
Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. North - Holland , Amsterdam - New York - Oxford 1978 .

[30] Zafran, M.
Spectral theory and interpolation of operators. J. Funct. Anal. 36 , 185 - 204 (1980) .

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten

J.Boos, G.Dähn, H.Heyer, R.Nagel, H.H.Schaefer, U.Schlotterbeck, E.Siebert, M.Wolff, K.Zeller (Mathematik) ,

M.Baumann, W.Dittrich, F.Gönnenwein, H.Krüger, F.Lenz, G.Mack, G.Möllenstedt, R.Speidel, H.Stumpf, K.Wildermuth, H.Wittern (Physik) .

Lebenslauf

Am 3.Oktober 1954 wurde ich, Jürgen Auterhoff, als Sohn des Universitätsprofessors Harry Auterhoff und dessen Ehefrau Melitta, geb. Lattewitz, in Würzburg geboren. Ab April 1961 besuchte ich die Volksschule Sophienstraße in Braunschweig und ab November 1963 die Hölderlinschule in Tübingen. Im April 1965 trat ich dort in das Keplergymnasium ein, wo ich am 7.Juni 1973 die Reifeprüfung ablegte. Nach dem anschließenden Wehrdienst begann ich im Wintersemester 1974/75 das Studium der Physik an der Universität Tübingen. Am 16.Mai 1979 bestand ich dort die Diplomprüfung. Die Diplomarbeit trägt den Titel "Berechnung der Verzeichnung 3.Ordnung in rotationssymmetrischen elektrostatischen Nachbeschleunigungssystemen" und wurde unter Anleitung von Prof.Dr.F.Lenz angefertigt. Anschließend begann ich an der Universität Tübingen das Studium der Mathematik und wurde im Sommersemester 1980 als Doktorand an der Mathematischen Fakultät zugelassen. Die Dissertation "Interpolationseigenschaften des Spektrums linearer Operatoren auf L^p - Räumen" fertigte ich unter Anleitung von Prof.Dr.H.H.Schaefer an.

Sprint-Druck GmbH
7000 Stuttgart 30
Wiener Str. 117
Tel. 0711/81 26 69